RESOLUÇÃO ITA 2024/2025

MATEMÁTICA

2ª FASE

05 de outubro de 2024

Convenções	: considere o sistema de coordenadas cartesiano, a menos que haja indicação contrária. Os eixos horizontal e vertical são indicados respectivamente por O_x e O_y, e o centro do sistema, por O.
i	: denota a unidade imaginária, $i^2 = -1$.
$\overline{AB}$	: denota o segmento de reta de extremidades nos pontos A e B.
AB	: denota a reta que passa pelos pontos A e B.
$m(\overline{AB})$	: denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$.
$max\{i, j\}$	: denota o maior dentre os valores i e j.
$detA$	: denota o determinante da matriz A.
A^T	: denota a transposta da matriz A.
A^{-1}	: denota a inversa da matriz A.
$^1(a_{ij})$	: representa uma matriz cuja entrada na linha i e coluna j é indexada por a_{ij}.

1ª QUESTÃO

Encontre os valores reais a e b tais que o polinômio $p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1$, ao ser dividido por $x^2 - x + 1$, deixe resto $2x + 1$.

RESOLUÇÃO 1ª QUESTÃO:

<u>1ª Solução</u>

$$\begin{cases} x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \Rightarrow x^3 \equiv -1 \ \left(mód\left(x^2 - x + 1\right)\right) \\ x^2 \equiv x - 1 \ \left(mód\left(x^2 - x + 1\right)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1 \equiv \left(x^3\right)^{19} + a\left(x^3\right)^4 \cdot x^2 + b\left(x^3\right)^2 \cdot x + 1 \quad \left(mód\left(x^2 - x + 1\right)\right)$$

$$\equiv (-1)^{19} + a(-1)^4 \cdot x^2 + b(-1)^2 \cdot x + 1 \quad \left(mód\left(x^2 - x + 1\right)\right)$$

$$\equiv -1 + ax^2 + bx + 1 \quad \left(mód\left(x^2 - x + 1\right)\right)$$

$$\equiv a(x-1) + bx \quad \left(mód\left(x^2 - x + 1\right)\right)$$

$$\equiv (a+b)x - a \quad \left(mód\left(x^2 - x + 1\right)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -a = 1 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{a} = -1 \ \boldsymbol{e} \ \boldsymbol{b} = 3$$

<u>2ª Solução</u>

$$x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1 \equiv \left(x^2 - x + 1\right) \cdot Q(x) + (2x + 1)$$

As raízes de D(x) = $x^2 - x + 1$ são $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = cis\left(\frac{\pi}{3}\right) e \, x_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Fazendo x = $cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ na expressão original temos:

$$cis\left(\frac{57\pi}{3}\right)+acis\left(\frac{14\pi}{3}\right)+bcis\left(\frac{7\pi}{3}\right)+1\equiv(0)\cdot Q\left(cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+\left(2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\right)$$

$$\Rightarrow cis(19\pi)+acis\left(\frac{2\pi}{3}\right)+bcis\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\equiv\left(2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\right)$$

$$\Rightarrow -1+a\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+b\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$$

$$\Rightarrow(-a+b)+(a+b)\sqrt{3}i=4+2\sqrt{3}i$$

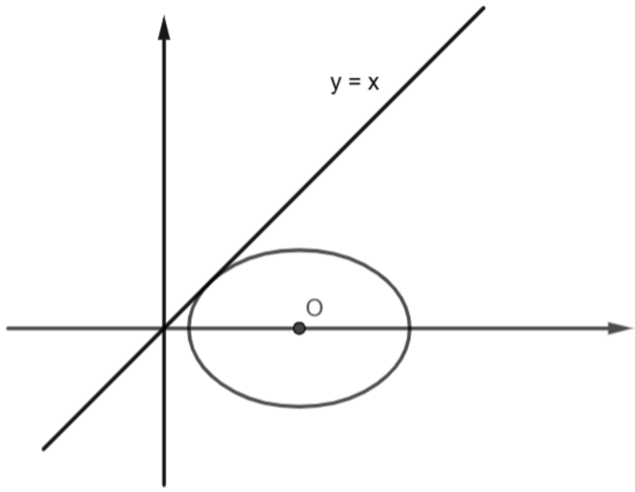
$$\Rightarrow\begin{cases}-a+b=4\\ a+b=2\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{a}=-1\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{b}=3$$

2ª QUESTÃO

Seja E uma elipse com eixo focal no eixo O_x do sistema de coordenadas cartesiano. O centro de E é o ponto $(r,0)$, com $r>0$, sua excentricidade é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e seu semieixo maior mede $\sqrt{2}$.

Considerando os pontos $(x,y)\in E$, determine o valor de r para que $\frac{y}{x}$ tenha valor máximo igual a 1.

RESOLUÇÃO 2ª QUESTÃO:



$$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ e=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow c=1\Rightarrow b^2+1^2=\sqrt{2}^2\Rightarrow b=1$$

Portanto, a equação da elipse é: $\frac{(x-r)^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$

Como o maior valor de y/x na elipse é igual a 1, então a elipse deve tangenciar a reta $y=x$, ou seja, o sistema formado pelas equações da elipse e da reta deve ter solução única.

$$\begin{cases} y = x \\ \dfrac{(x-r)^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad (x-r)^2 + 2x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2rx + \left(r^2 - 2\right) = 0$$

Para que o sistema tenha solução única a eq. Do 2º grau acima deve ter $\Delta = 0$

$$\Rightarrow (-2r)^2 - 4\cdot 3\cdot \left(r^2 - 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow 4r^2 - 12r^2 + 24 = 0 \Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow \boldsymbol{r} = \sqrt{3}$$

3ª QUESTÃO

Sejam $\alpha, \beta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ tais que

$$\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha) - 2\operatorname{sen}(\beta) + \cos(\beta) = \frac{3}{4}.$$

Calcule o valor de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$.

RESOLUÇÃO 3ª QUESTÃO:

Como $\alpha, \beta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\alpha \le 0\, e \, \cos\beta \le 0$

$$\begin{cases} sen\,\alpha - sen\,\beta = \dfrac{1}{4} \\ sen\,\alpha - 2sen\,\beta + \cos\beta = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

Subtraindo as duas equações temos:

$$-sen\,\beta + \cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow sen\,\beta = \cos\beta - \frac{1}{2}$$

Substituindo na equação fundamental da trigonometria temos:

$$\left(\cos\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2\beta - \cos\beta - \frac{3}{4} = 0 \quad \overset{\cos\beta\le 0}{\Rightarrow} \quad \cos\beta = \frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

$$sen\,\beta = \cos\beta - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow sen\,\beta = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$$

$$sen\,\alpha - sen\,\beta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad sen\,\alpha = \frac{1}{4} + \frac{-1-\sqrt{7}}{4} \quad \Rightarrow \quad sen\,\alpha = \frac{-\sqrt{7}}{4}$$

Substituindo na equação fundamental da trigonometria temos:

$$\left(\frac{-\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \frac{7}{16} \quad \overset{\cos\alpha\le 0}{\Rightarrow} \quad \cos\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha =$$

$$\frac{-\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{1-\sqrt{7}}{4} + \frac{-1-\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{-3}{4} = \frac{-\sqrt{7}+7+3+3\sqrt{7}}{16} = \frac{\sqrt{7}+5}{8}$$

4ª QUESTÃO

Seja ABC um triângulo de lados $m\left(\overline{AB}\right)=6$; $m\left(\overline{AC}\right)=10$ e $m\left(\overline{BC}\right)=14$. Calcule o raio da circunferência externa ao triângulo ABC que tangencia simultaneamente o segmento $\overline{BC}$ e as retas suportes AB e AC.

RESOLUÇÃO 4ª QUESTÃO:

<u>Solução</u>

No triângulo ABC temos $\begin{cases} a=14 \\ b=10 \text{ e queremos } r_A \\ c=6 \end{cases}$

Basta utilizarmos duas fórmulas para cálculo de áreas de triângulo:

$$\begin{cases} S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} \\ S=(p-a)\cdot r_A \end{cases} \Rightarrow \quad (p-a)\cdot r_A = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

$$\Rightarrow (15-14)\cdot r_A=\sqrt{15\cdot(15-14)\cdot(15-10)\cdot(15-6)}$$

$$r_A=\sqrt{15\cdot(1)\cdot(5)\cdot(9)}=15\sqrt{3}$$

5ª QUESTÃO

Usando as aproximações $log_{10}2=0,3010$, $log_{10}3=0,4771$ e $log_{10}7=0,8450$, determine o primeiro algarismo (da esquerda para a direita) do resultado de 3^{100}.

RESOLUÇÃO 5ª QUESTÃO:

Utilizando logaritmos dados e as propriedades de logaritmos, temos:

$$\log_{10}5=\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0,301=0,699$$

$$\log_{10}6=\log_{10}(3\times 2)=\log_{10}3+\log_{10}2=0,4771+0,301=0,778$$

$$\log_{10}3=0,4771$$

$$\log_{10}3^{100}=47,71$$

$$\log_{10}\left(5\times 10^{47}\right)=\log_{10}5+47\log_{10}10=0,699+47=47,699$$

$$\log_{10}\left(6\times 10^{47}\right)=\log_{10}6+47\log_{10}10=0,778+47=47,778$$

Portanto,

$$5\times 10^{47}<3^{100}<6\times 10^{47}$$

Logo 3^{100} começa por 5.

6ª QUESTÃO

Uma moeda não viciada é lançada n vezes. Encontre os valores de n que maximizam a probabilidade de sair cara pela quarta vez exatamente no enésimo lançamento.

RESOLUÇÃO 6ª QUESTÃO:

Utilizando a distribuição binomial negativa, sabemos que no último lançamento tem que sair cara e nos demais (n-1) lançamentos devem sair três caras, portanto:

A probabilidade de aparecer a 4ª cara, exatamente no enésimo lançamento, é:

$$p(X=4)=\binom{n-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1\cdot}\cdot\frac{1}{2}$$

$$p(X=4)=\frac{\binom{n-1}{3}}{2^{n}}$$

Seja $f(n)=\dfrac{\binom{n-1}{3}}{2^{n}}$

Queremos: $f(n-1)\le f(n)\ge f(n+1)$

$$f(n)\ge f(n+1)\leftrightarrow\frac{\binom{n-1}{3}}{2^{n}}\ge\frac{\binom{n}{3}}{2^{n+1}}$$

Simplificando temos: $2n-6\ge n\Leftrightarrow n\ge 6$

Como: f(4) = $\frac{1}{16}$ < f(5)= $\frac{1}{8}$ < f(6)= f(7)= $\frac{5}{32}$ > f(8)= $\frac{35}{256}$

Portanto, a probabilidade é máxima para dois valores de n: 6 e 7.

7ª QUESTÃO

Considere o polinômio $p(x)=x^3+ax^2+b$. Determine os valores reais a e b, sabendo que:

I. $p(x)$ tem uma raiz real dupla;

II. Os pontos $(x_1,0)$, $(x_2,0)$ e $(0;b)$ são vértices de um triângulo retângulo, em que x_1 e x_2 são raízes distintas de $p(x)$.

RESOLUÇÃO 7ª QUESTÃO:

Se o polinômio $p(x)$ de coeficientes reais tem uma raiz real dupla, então suas três raízes são reais.

Sejam r (dupla) e s as raízes reais de $p(x)$.

Pelas relações de Girard, temos:

$$\sigma_1=2r+s=-a$$

$$\sigma_2=r^2+2rs=0$$

$$\sigma_3=r^2s=-b$$

Se os pontos $(r,0)$, $(s,0)$ e $(0,b)$ são vértices de um triângulo retângulo, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(r^2+b^2\right)+\left(s^2+b^2\right)=(r-s)^2 \Leftrightarrow r^2+s^2+2b^2=r^2-2rs+s^2 \Leftrightarrow b^2=-rs$$

Note que se considerarmos $\sqrt{r^2+b^2}$ a hipotenusa do triângulo retângulo, temos:

$$\left(r^2+b^2\right)=(r-s)^2+\left(s^2+b^2\right) \Leftrightarrow r^2+b^2=r^2-2rs+s^2+s^2+b^2 \Leftrightarrow 2s(s-r)=0$$

que implica $s=0$ e substituindo em σ_2 também $r=0,$ o que contradiz o enunciado.

O mesmo ocorre se considerarmos $\sqrt{s^2+b^2}$ a hipotenusa do triângulo retângulo.

Substituindo $b^2=-rs$ em σ_3, vem:

$$r^2s=-b \Leftrightarrow r\cdot rs=-b \Rightarrow r\cdot\left(-b^2\right)=-b \Leftrightarrow r=\frac{1}{b}$$

Substituindo $r=\frac{1}{b}$ em σ_2, temos:

$$\sigma_2=r^2+2rs=0 \Leftrightarrow s=-\frac{r}{2}=-\frac{1}{2b}$$

Substituindo $r=\frac{1}{b}$ e $s=-\frac{1}{2b}$ em $b^2=-rs$, vem:

$$b^2=-\frac{1}{b}\cdot\left(-\frac{1}{2b}\right) \Leftrightarrow b^4=\frac{1}{2} \Leftrightarrow b=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=\pm\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Substituindo os valores obtidos em σ_1, temos:

$$a=-2r-s=-2\cdot\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{2b}\right)=-\frac{2}{b}+\frac{1}{2b}=\frac{-3}{2b}=\mp\frac{3\sqrt[4]{2}}{2}$$

Logo,

$$a=\mp\frac{3\sqrt[4]{2}}{2} \text{ e } b=\pm\frac{\sqrt[4]{8}}{2}.$$

8ª QUESTÃO

Seja $A_k=\left(a_{ij}\right)$ uma matriz quadrada de ordem k, em que $a_{ij}=max\{i,j\}$ para todo i,j em $\{1,2,\cdots,k\}$.

Determine $\sum_{k=1}^{2025}\det\left(A_k\right)$.

RESOLUÇÃO 8ª QUESTÃO:

$$A_k=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$

Fazendo $L_k \leftarrow L_k-L_1, \forall k\in\{2,\ldots n\}$

Onde L_k é a linha k

Obtemos:

$$det(A_k) = det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Fazendo $L_1 \leftarrow (k-1)L_k, \forall k \in 2,3,\ldots,n$

Temos:

$$det(A_k) = det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Aplicando Laplace na primeira linha temos:

$$det(A_k) = (-1)^{n+1} n$$

$$\sum_{k=1}^{2025} A_k = 1-2+3-4+\ldots+2023-2024+2025 = 1013$$

9ª QUESTÃO

Determine a quantidade de matrizes 5×5 invertíveis e com entradas inteiras que satisfazem a propriedade $A^{-1} = A^T$.

RESOLUÇÃO 9ª QUESTÃO:

Tal matriz é chamada ortogonal, o que significa que as colunas (e linhas) precisam ser mutuamente perpendiculares.

Obviamente, os 5 vetores unitários possíveis $(\pm1,0,0,0,0)$, $(0,\pm1,0,0,0)$, $(0,0,\pm1,0,0)$, $(0,0,0,\pm1,0)$ e $(0,0,0,0,\pm1)$ são perpendiculares. Se duas linhas (ou colunas) tiverem um ±1 na mesma posição, elas não são perpendiculares e a matriz não seria ortogonal.

Portanto, apenas matrizes com os 5 vetores unitários diferentes são ortogonais. Como cada vetor unitário pode ocorrer em qualquer posição de linha (ou coluna), há $5! = 120$ diferentes dessas permutações das linhas e $2^5 = 32$ de escolher o elemento diferente de zero em cada linha.

Pois para A ser não singular, A não pode conter linhas ou colunas com todos os zeros porque, nesse caso, o determinante seria zero. Obviamente, cada linha ou coluna precisa ter exatamente ou um 1, ou um -1, mas não pode ter mais de um.

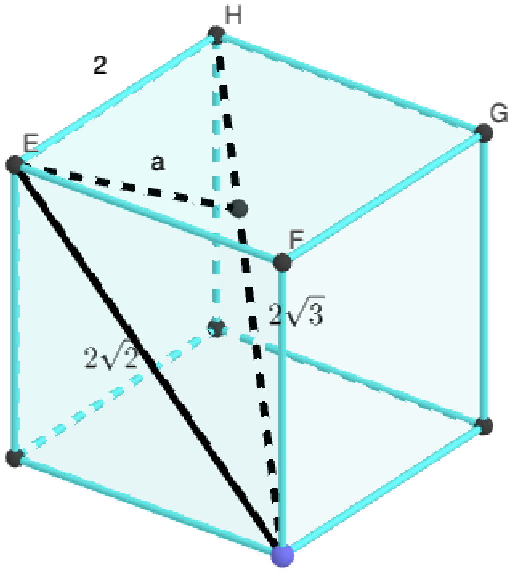
Então a resposta é $120 \cdot 32 = 3840$.

10ª QUESTÃO

Calcule a área da projeção ortogonal de um cubo de aresta 2 sobre um plano perpendicular a uma das diagonais do cubo.

RESOLUÇÃO 10ª QUESTÃO:

A projeção ortogonal será o hexágono regular de lado a



Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo com vértices em E, H e outro no diagonal do cubo da figura na base inferior, temos:

$$a \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

A área da projeção será

$$6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Professores:

Alexandre de Azevedo Silva | Carlos Davyson | Haroldo Costa Silva Filho

Marcelo Xavier | Renato Madeira | Ricardo Secco | Sérgio João Buffon Júnior