RESOLUÇÃO IME 2024/2025

MATEMÁTICA

2ª FASE

28 de outubro de 2024

1ª QUESTÃO

Dado $P(x) = cossec^2(\alpha) \cdot x^2 - cotg(\alpha) \cdot x + cos(\alpha)$.

Para que valores de α, no intervalo $(0, \pi)$, as raízes de $P(x)$ são reais?

RESOLUÇÃO 1ª QUESTÃO:

Notemos, inicialmente, que se $\alpha \in (0, \pi)$, então $\text{sen}(\alpha) \neq 0$.

Para que as raízes de $P(x) = cossec^2(\alpha) \cdot x^2 - cotg(\alpha) \cdot x + cos(\alpha)$ sejam reais, o seu discriminante deve ser maior ou igual a zero. Assim, temos:

$$\Delta = (-\text{cotg}(\alpha))^2 - 4 \cdot \text{cossec}^2(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} - 4 \cdot \frac{1}{\text{sen}^2(\alpha)} \cdot \cos(\alpha) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2(\alpha) - 4\cos(\alpha)}{\text{sen}^2(\alpha)} \geq 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) \cdot (\cos(\alpha) - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) \leq 0 \ \vee \ \cos(\alpha) \geq 4 \Leftrightarrow \cos(\alpha) \leq 0$$

Assim, temos $\alpha \in (0, \pi)$ e $\cos(\alpha) \leq 0$, então $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2ª QUESTÃO

A equação $x^3 - \alpha x + \beta = 0$, onde α e β são constantes reais, admite raiz não real de módulo γ.

Determine α em função de β e γ.

RESOLUÇÃO 2ª QUESTÃO:

Se a equação $x^3 - \alpha x + \beta = 0$ de coeficientes reais admite uma raiz não real de módulo γ, então seu conjugado também é raiz da equação e a terceira raiz é um número real.

Sejam a, b e $\bar{b}$ as raízes da equação, onde $|b| = \gamma$, então pelas relações de Girard, temos:

$$\sigma_1 = a + b + \bar{b} = 0 \Leftrightarrow a + 2\text{Re}(b) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(b) = -\frac{a}{2} \qquad (i)$$

$$\sigma_2 = ab + a\bar{b} + b\bar{b} = -\alpha \Leftrightarrow a(b + \bar{b}) + |b|^2 = -\alpha \Leftrightarrow a \cdot 2\text{Re}(b) + \gamma^2 = -\alpha \Leftrightarrow \text{Re}(b) = \frac{-\alpha - \gamma^2}{2a} \qquad (ii)$$

$$\sigma_3 = ab\bar{b} = -\beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma^2 = -\beta \qquad (iii)$$

Igualando *(i)* e *(ii)*, vem $-\frac{a}{2} = \frac{-\alpha - \gamma^2}{2a} \Leftrightarrow a^2 = \alpha + \gamma^2$.

Elevando a expressão (iii) ao quadrado e substituindo a igualdade anterior, vem:

$$a^2 \cdot \gamma^4 = \beta^2 \Rightarrow (\alpha + \gamma^2) \cdot \gamma^4 = \beta^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta^2}{\gamma^4} - \gamma^2$$

3ª QUESTÃO

Há três casas numeradas pelos números naturais k, m e n, onde $0 < k < m < n$. Três pessoas A, B e C as alugam por temporada com ocupação por sorteio. A cada sorteio cada pessoa recebe um valor em reais correspondente ao número da casa a si alocada. Depois do último sorteio A, B e C têm, acumulado, respectivamente, 10, 9 e 14 reais. Sabe-se que foram realizados pelo menos 2 sorteios e que no último deles B recebeu n reais.

Quais são os números das casas?

RESOLUÇÃO 3ª QUESTÃO:

Seja $x \geq 2$ a quantidade de sorteios e sabendo que em cada sorteio o valor distribuído é $k+m+n$, então $x \cdot (k+m+n) = 10+9+14 = 33$.

Se $0 < k < m < n$, então $k \geq 1$, $m \geq 2$ e $n \geq 3$, o que implica que $k+m+n \geq 6$.

Como $x \geq 2$, $k+m+n \geq 6$ e $x \cdot (k+m+n) = 33 = 3 \cdot 11$, então $x = 3$ e $k+m+n = 11$.

Vamos analisar os 9 reais de B sabendo que ele recebeu n reais no último sorteio. A única forma de obter um valor que contém n e seja menor que $k+m+n=11$ é fazendo $k+k+n = 2k+n = 9$. Assim, concluímos que B recebeu k reais nos dois primeiros sorteios.

Note que só temos um k para distribuir, então a única maneira de formar um valor menor que $k+m+n=11$ é fazendo $k+m+m = k+2m = 10$.

Agora restam penas um m e dois n's para distribuir, o que implica $m+2n = 14$.

Assim, temos um sistema $\begin{cases} 2k+n=9 \\ k+2m=10 \\ m+2n=14 \end{cases} \Leftrightarrow k=2;\ m=4;\ n=5.$

4ª QUESTÃO

Determine as raízes complexas da equação abaixo, onde $i^2 = -1$.

$$\frac{x^2+\frac{1+1\sqrt{3}}{2}}{x+1} \cdot \frac{x^2+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{x-1} = \frac{16}{\left(x^2-1\right)^2}$$

RESOLUÇÃO 4ª QUESTÃO:

Seja $z = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\pi}{3}$, a equação pode ser escrita como

$$\frac{x^2+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{x+1} \cdot \frac{x^2+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{x-1} = \frac{16}{\left(x^2-1\right)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2+z}{x+1} \cdot \frac{x^2+\overline{z}}{x-1} = \frac{16}{\left(x^2-1\right)^2} \Leftrightarrow \frac{\left(x^2+z\right)\left(x^2+\overline{z}\right)}{x^2-1} = \frac{16}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+z\right)\left(x^2+\overline{z}\right)\left(x^2-1\right) = 16 \Leftrightarrow \left(x^4+x^2+1\right)\left(x^2-1\right) = 16 \Leftrightarrow x^6-1 = 16 \Leftrightarrow x^6 = 17$$

Aplicando a 2ª fórmula de De Moivre, temos:

$$x_k = \sqrt[6]{17} \cdot \left(\cos\frac{k \cdot 2\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{k \cdot 2\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{17} \cdot \left(\cos\frac{k\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{k\pi}{3}\right), \text{ com } k = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

2ª solução:

$$\frac{x^2+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{x+1}\cdot\frac{x^2+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{x-1}=\frac{16}{\left(x^2-1\right)^2}\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{(x+1)}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{2}}{(x-1)}=\frac{16}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2}{x^2-1}=\frac{16}{\left(x^2-1\right)^2}\Leftrightarrow\left(x^4+x^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\left(x^2-1\right)=16$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)=16\Leftrightarrow x^6-1=16\Leftrightarrow x^6=17$$

Aplicando a 2ª fórmula de De Moivre, temos:

$$x_k=\sqrt[6]{17}\cdot\left(\cos\frac{k\cdot 2\pi}{6}+i\cdot\text{sen}\,\frac{k\cdot 2\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{17}\cdot\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\cdot\text{sen}\,\frac{k\pi}{3}\right),\text{ com } k=0,1,2,\ldots,5$$

5ª QUESTÃO

Prove que o volume de um prisma triangular é igual ao semiproduto da área de uma face lateral pela distância desta face à sua aresta oposta.

RESOLUÇÃO 5ª QUESTÃO:

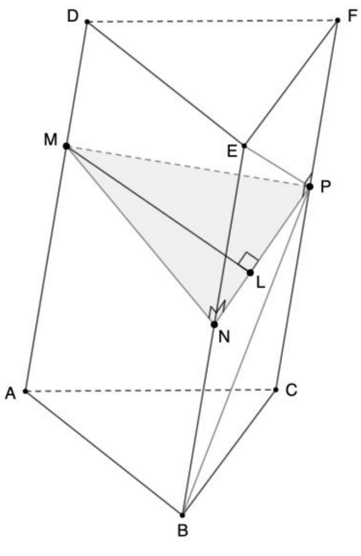
Afirmação: O volume do prisma é dado pelo produto da área de sua secção reta pelo comprimento de sua aresta lateral.

Considere um prisma $ABCDEF$ e seja MNP sua secção reta. Então, $(MNP)\perp AD, BE$ e CF.

Se ML é altura do triângulo MNP, também temos:

$$\begin{cases} ML\perp NP \\ ML\perp BE \end{cases}$$

o que implica que ML é perpendicular ao plano determinado por NP e BE, ou seja, ML é perpendicular à face $BCFE$ e também $ML\perp AD$. Portanto, ML é igual à distância desta face à aresta oposta AD.



Finalmente, a área da face lateral $BCFE$ é o dobro do triângulo BPE, a dizer:

$$A_{BCFE}=2\cdot\left(\frac{BE\cdot NP}{2}\right)=BE\cdot NP.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}V_{prisma} &= A_{\text{secção reta}} \cdot BE \\ &= A_{MNP} \cdot BE \\ &= \frac{NP \cdot ML}{2} \cdot BE \\ &= \frac{1}{2} \cdot NP \cdot BE \cdot ML \\ &= \frac{1}{2} \cdot A_{BCFE} \cdot ML,\end{aligned}$$

que é o semiproduto de uma face lateral pela sua distância à aresta oposta.

6ª QUESTÃO

Sejam as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & sen\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 3 \\ sen\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 & -2 \\ 2 & -1/2 & sen\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) \\ 1/2 & sen\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) & -1/2 \end{bmatrix}$$

Determine os valores de x pertencentes ao intervalo $\left[0, 2\pi\right]$ tais que $det\left(2AB + A - 2B - I\right) = 0$.

RESOLUÇÃO 6ª QUESTÃO:

Inicialmente, observemos que $2AB + A - 2B - I = (A - I)(2B + I)$.

Aplicando o teorema de Binet, temos:

$$det\left(2AB + A - 2B - I\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left[(A-I)(2B+I)\right] = \det(A-I) \cdot \det(2B+I) = 0$$
$$\Leftrightarrow \det(A-I) = 0 \ \vee \ \det(2B+I) = 0$$

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} 0 & sen\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 3 \\ sen\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2\,\text{sen}\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) - 3\,\text{sen}\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{4x+\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \left[0, 2\pi\right] \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

$$\det(2B+I) = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 4 & 0 & 2sen\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) \\ 1 & 2sen\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12\,\text{sen}\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) - 32\,\text{sen}\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{4x-\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

Portanto, os valores de x que satisfazem as condições do enunciado são os elementos do conjunto $\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

7ª QUESTÃO

Considere o polinômio $P(x) = \left(\dfrac{x^{2025}-1}{x-1}\right)^{2025}$.

Determine o coeficiente de x^3 em $P(x)$.

RESOLUÇÃO 7ª QUESTÃO:

Observe que $\dfrac{x^{2025}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2024}$.

Assim, temos o polinômio

$$P(x) = \left(\frac{x^{2025}-1}{x-1}\right)^{2025} = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2024}\right)^{2025}$$

Usando a expansão multinomial (Polinômio de Leibniz) temos como termo geral

$$T_{GERAL} = \frac{2025!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!\ldots\alpha_{2025}!} \cdot 1^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} \cdot x^{2\alpha_3} \cdot x^{3\alpha_4} \cdot \ldots \cdot x^{2024\alpha_{2025}} = \frac{2025!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!\ldots\alpha_{2025}!} \cdot x^{\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + \ldots + 2024\alpha_{2025}}$$

com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2025} = 2025$

Para obtermos o coeficiente de x^3, devemos ter

$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + \ldots + \alpha_{2025} = 3$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2025} = 2025$

Mas as igualdades só podem ocorrer para as seguintes casos

I) $\alpha_4 = 1$, $\alpha_1 = 2024$ e $\alpha_k = 0$, para $1 \le k \le 2025$ e $k \ne 1, 4$

II) $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 2023$ e $\alpha_k = 0$, para $1 \le k \le 2025$ e $k \ne 1, 2, 3$

III) $\alpha_2 = 3$, $\alpha_1 = 2022$ e $\alpha_k = 0$, para $1 \le k \le 2025$ e $k \ne 1, 2$

Dessa forma, considerando a relação de Stifel, o coeficiente de x^3 é igual a

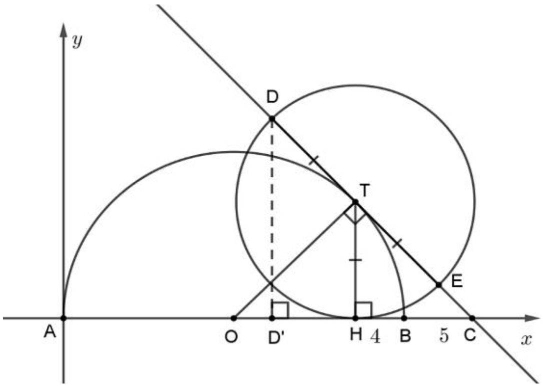
$$P_{2025}^{1,2024} + P_{2025}^{1,1,2023} + P_{2025}^{3,2022} = \binom{2025}{1} + 2\binom{2025}{2} + \binom{2025}{3} = \binom{2025}{1} + \binom{2025}{2} + \binom{2025}{2} + \binom{2025}{3} = \binom{2026}{2} + \binom{2026}{3} = \binom{2027}{3}$$

8ª QUESTÃO

Seja x uma semicircunferência de diâmetro AB contida no primeiro quadrante, sendo $A = (0, 0)$ e $B = (x_B, 0)$. A reta t tangência α no ponto $T = (x_T, y_T)$ e intercepta o eixo x no ponto $C = (x_C, 0), x_c > x_B$. Com centro em T, traça-se uma circunferência de raio TH, $H = (x_T, 0)$. Essa circunferência corta a reta t nos pontos $D = (x_D, y_D)$ e $E = (x_E, y_E)$. Sabe-se que $x_D < x_B < x_E$, $BC = 5$ e $HB = 4$.

Determine as coordenadas de D.

RESOLUÇÃO 8ª QUESTÃO:



Observe que $AB = x_B$, então $OA = OB = OT = \frac{x_B}{2}$.

Aplicando as relações métricas no triângulo retângulo OTC, temos:

$$OC = OB + BC = \frac{x_B}{2} + 5$$

$$OH = OB - HB = \frac{x_B}{2} - 4$$

$$OT^2 = OC \cdot OH \Leftrightarrow \left(\frac{x_B}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_B}{2}+5\right)\left(\frac{x_B}{2}-4\right) \Leftrightarrow \frac{x_B^2}{4} = \frac{x_B^2}{4} + \frac{x_B}{2} - 20 \Leftrightarrow x_B = 40$$

$$TH^2 = OH \cdot HC = \left(\frac{40}{2}-4\right)\cdot 9 = 16 \cdot 9 \Leftrightarrow TH = 12$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo THC, temos:

$$CT^2 = HC^2 + TH^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Leftrightarrow CT = 15.$$

Considerando a semelhança entre os triângulos CHT e CD'D, vem:

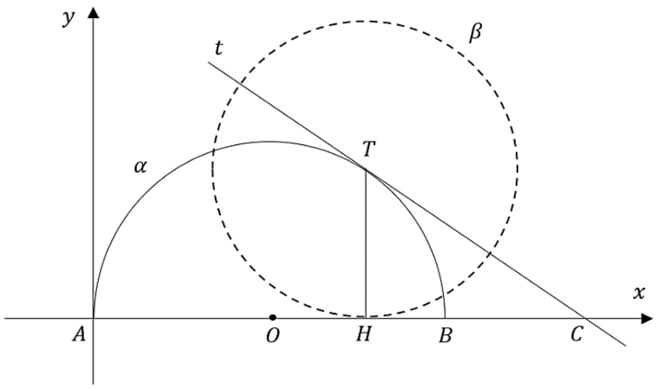
$$\frac{DD'}{TH} = \frac{D'C}{HC} = \frac{CD}{CT} \Rightarrow \frac{DD'}{12} = \frac{D'C}{9} = \frac{15+12}{15} \Leftrightarrow DD' = \frac{108}{5} \wedge D'C = \frac{81}{5}$$

Dessa forma, as coordenadas do ponto D são dadas por

$$x_D = AD' = AC - D'C = (40+5) - \frac{81}{5} = \frac{144}{5}$$

$$y_D = DD' = \frac{108}{5}$$

2ª solução:



Para a circunferência α temos raio $R = \frac{x_B}{2}$ e centro $O(R,0)$.

Do enunciado $BC = 5$ e $HB = 4$. Assim $HC = 9$, $OH = R - 4$ e $AH = 2R - 4$

Fazendo $TH = h$ e $TC = l$.

i) Equação da circunferência $\alpha : (x-R)^2 + y^2 = R^2$

Ponto $T(2R-4, h) \in \alpha$, então:

$$(2R-4-R)^2 + h^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - 8R + 16 + h^2 = R^2 \Leftrightarrow \boxed{h^2 = 8R - 16} \quad (I)$$

ii) Potência de C em relação a O: $l^2 = 5(5+2R)$

Pitágoras no $\Delta CHT : l^2 = h^2 + 9^2$

Igualando as duas equações: $5(5+2R) = h^2 + 9^2 \Leftrightarrow \boxed{h^2 = 10R - 56} \quad (II)$

Agora, igualando as equações (I) e (II), temos:

$$8R - 16 = 10R - 56 \Rightarrow 2R = 40 \Rightarrow R = 20$$

Assim, $h^2 = 160 - 16 = 144 \Rightarrow h = 12$.

iii) Coeficiente angular da reta t: $m_t = -\frac{h}{HC} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$

Sabemos que o ponto $C(45,0) \in t$.

Assim, a equação da reta t é: $y = -\frac{4}{3}(x-45) \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{4}{3}x + 60}$

iv) Seja β a circunferência com centro em $T(2R-4,h) = (36,12)$ e raio $TH = h = 12$.

Assim, temos a equação β: $(x-36)^2 + (y-12)^2 = 12^2$.

Fazendo $t \cap \beta$:

$$(x-36)^2 + \left(60 - \frac{4}{3}x - 12\right)^2 = 12^2 \Leftrightarrow (x-36)^2 + \left(48 - \frac{4}{3}x\right)^2 = 12^2$$

$$\Leftrightarrow (x-36)^2 + \frac{16}{9}(36-x)^2 = 12^2 \Leftrightarrow \frac{25}{9}(x-36)^2 = 12^2 \Leftrightarrow x - 36 = \pm\frac{36}{5}$$

Como $x_D < x_B = 2R = 40$, temos que $x_D - 36 = -\frac{36}{5} \Rightarrow x_D = \frac{144}{5}$.

Substituindo na equação da reta t, encontramos a ordenada do ponto D:

$$y_D = 60 - \frac{4}{3}\left(\frac{144}{5}\right) = \frac{108}{5}$$

Então temos a resposta $D\left(\frac{144}{5}, \frac{108}{5}\right)$.

9ª QUESTÃO

Sejam 3 pontos colineares A, B e C tais que $AB \neq BC$. Cada par de circunferências de mesmo raio, uma passando por A e B e outra por B e C, se interceptam em B e M.

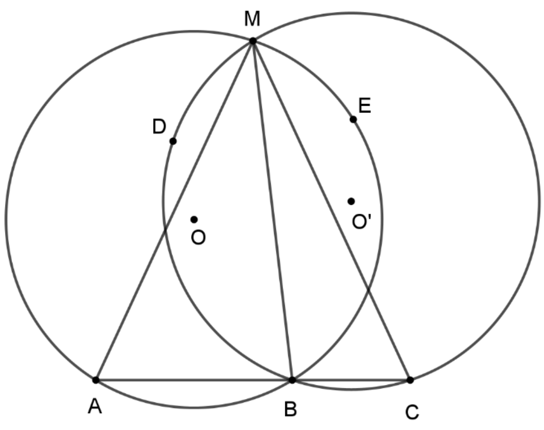
Determine o lugar geométrico do ponto M.

RESOLUÇÃO 9ª QUESTÃO:

A corda BM é comum às duas circunferências de mesmo raio, então os arcos $BDM = BEM$. Isso implica que $B\hat{A}M = B\hat{C}M$, pois são ângulos inscritos em arcos congruentes.

Se $B\hat{A}M = B\hat{C}M$, então o triângulo AMB é isósceles e seu vértice M está sobre a mediatriz de AC.

Portanto, o lugar geométrico do ponto M é a mediatriz do segmento AC, exceto o ponto médio de AC.



10ª QUESTÃO

Considere o seguinte subconjunto A do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\mid\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z-1}{z+1}\right|^{n}\leq k-1\right\},$$

onde $k>1$ é um número real dado.

Determine o valor máximo de $|z|$ para $z\in A$.

RESOLUÇÃO 10ª QUESTÃO:

Inicialmente, observemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z-1}{z+1}\right|^{n}\leq k-1$ é a soma de uma progressão geométrica infinita e deve ser convergente, pois é menor ou igual a $k-1$. Isso implica que a razão dessa P.G. deve ter módulo menor do que 1.

Assim, devemos ter $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$.

Aplicando a fórmula da soma da P.G. infinita, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z-1}{z+1}\right|^{n}=\frac{\left|\frac{z-1}{z+1}\right|}{1-\left|\frac{z-1}{z+1}\right|}\leq k-1\Leftrightarrow\frac{|z-1|}{|z+1|-|z-1|}\leq k-1\Leftrightarrow\frac{|z+1|}{|z-1|}-1\geq\frac{1}{k-1}\Leftrightarrow\frac{|z+1|}{|z-1|}\geq 1+\frac{1}{k-1}=\frac{k}{k-1}$$

A desigualdade $\frac{|z+1|}{|z-1|}\geq\frac{k}{k-1}$ representa o interior de um círculo de Apolônio.

Se $k>1\Leftrightarrow k-1>0$, então

$$(k-1)|z+1|\geq k|z-1|\Rightarrow(k-1)^2|z+1|^2\geq k^2|z-1|^2\Leftrightarrow(k-1)^2(z+1)(\bar{z}+1)\geq k^2(z-1)(\bar{z}-1)$$

$$\Leftrightarrow(k-1)^2|z|^2+(k-1)^2(z+\bar{z})+(k-1)^2\geq k^2|z|^2-k^2(z+\bar{z})+k^2$$

$$\Leftrightarrow\left[k^2-(k-1)^2\right]|z|^2-\left[k^2+(k-1)^2\right](z+\bar{z})+k^2-(k-1)^2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow(2k-1)|z|^2-\left(2k^2-2k+1\right)(z+\bar{z})+(2k-1)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow|z|^2-\frac{2k^2-2k+1}{2k-1}(z+\bar{z})+1\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(z-\frac{2k^2-2k+1}{2k-1}\right)\left(\bar{z}-\frac{2k^2-2k+1}{2k-1}\right)\leq\left(\frac{2k^2-2k+1}{2k-1}\right)^2-1$$

$$\Leftrightarrow\left|z-\frac{2k^2-2k+1}{2k-1}\right|^2\leq\frac{4k^2(k-1)^2}{(2k-1)^2}\Leftrightarrow\left|z-\frac{2k^2-2k+1}{2k-1}\right|\leq\frac{2k(k-1)}{2k-1}$$

O lugar geométrico acima representa o interior de uma circunferência de centro em $\left(\frac{2k^2-2k+1}{2k-1},0\right)$ e raio $\frac{2k(k-1)}{2k-1}$, que é o círculo de Apolônio que havíamos citado anteriormente.

Portando, o valor máximo do módulo de z é

$$|z|_{\max}=\frac{2k^2-2k+1}{2k-1}+\frac{2k^2-2k}{2k-1}=\frac{4k^2-4k+1}{2k-1}=\frac{(2k-1)^2}{2k-1}=2k-1.$$

2ª solução:

Vamos partir de $\frac{|z+1|}{|z-1|} \geq \frac{k}{k-1} \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{z+1} \leq \frac{k-1}{k}$ obtido na primeira solução.

Seja $w = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow |w| \leq \frac{k-1}{k}$.

$$w = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow wz + w = z - 1 \Leftrightarrow z = \frac{1+w}{1-w} \Rightarrow |z| = \frac{|1+w|}{|1-w|}$$

Para que o módulo de z seja máximo, vamos maximizar o numerador e minimizar o denominador. Assim,

$$|1+w|_{\max} = 1 + \frac{k-1}{k} = \frac{2k-1}{k}$$

$$|1-w|_{\min} = 1 - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}$$

Portanto, $|z|_{\max} = \frac{\frac{2k-1}{k}}{\frac{1}{k}} = 2k-1$.

Professores: