RESOLUÇÃO IME 2024/2025

MATEMÁTICA

1ª FASE

29 de setembro de 2024

1ª QUESTÃO

Números palíndromos na base b são números cuja representação nesta base é simétrica, ou seja, se os seus algarismos forem lidos de trás para frente obtém-se o mesmo número. A quantidade de números naturais positivos menores ou iguais a $(377)_8$ que são palíndromos na base dois é

(A) 16 (B) 26 (C) 30 (D) 31 (E) 32

RESOLUÇÃO 1ª QUESTÃO:

$$\begin{cases} 1 \leq N \leq (377)_8 \\ N \text{ é palíndromo na base } 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq N \leq 7 + 7 \times 8 + 7 \times 8^2 \Rightarrow 1 \leq N \leq 255$$

Convertendo para base 2: $(1)_2 \leq N \leq (11111111)_2$

Portanto N tem de 1 a 8 algarismos na base 2 e é palíndromo.

- Palíndromos com 1 algarismo = 1 = 1
- Palíndromos com 2 algarismos = 1 x 1 = 1
- Palíndromos com 3 algarismos = 1 x 2 x 1 = 2
- Palíndromos com 4 algarismos = 1 x 2 x 1 x 1 = 2
- Palíndromos com 5 algarismos = 1 x 2 x 2 x 1 x 1 = 4
- Palíndromos com 6 algarismos = 1 x 2 x 2 x 1 x 1 x 1 = 4
- Palíndromos com 7 algarismos = 1 x 2 x 2 x 2 x 1 x 1 x 1 = 8
- Palíndromos com 8 algarismos = 1 x 2 x 2 x 2 x 1 x 1 x 1 x 1 = 8

Logo quantidade de valores possíveis para N é igual a 2 x (1 + 2 + 4 + 8) = 30

ALTERNATIVA CORRETA: C

2ª QUESTÃO

Seja $f:[3,\infty) \to B$ a função definida por

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} \right)^n,$$

onde $B = \{ f(a) \mid a \in [3,\infty) \}$.

A soma das coordenadas do ponto pertencente ao gráfico da função inversa de $f(x)$ mais próximo do eixo das abscissas é

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) 3 (E) 4

RESOLUÇÃO 2ª QUESTÃO:

O domínio de f é $[3,\infty)$, então temos:

$$x \geq 3 \Leftrightarrow x-1 \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{2} \geq 0$$

$$0 \leq \sqrt{x-1} - \sqrt{2} < \sqrt{x-1} \Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} < 1$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}\right)^{n}$ é a soma de uma progressão geométrica infinita de 1° termo $\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}$ e razão $\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}$, cujo módulo é menor do que 1. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}\right)^{n}=\frac{\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}}{1-\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}}=\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}-1$$

Daí, vem

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}\right)^{n}=1+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}-1\Leftrightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}.$$

Vamos agora inverter

$$f:\left[3,\infty\right)\rightarrow B \text{ tal que } f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}.$$

Para f^{-1} teremos:

$$x=\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2x^{2}=y-1\Rightarrow y=2x^{2}+1$$

$$f^{-1}(x)=2x^{2}+1, mas\ como\ Im_{f^{-1}}=[3,\infty)\Rightarrow Dom_{f^{-1}}=[1,\infty)\Rightarrow$$

Portanto, o ponto mais próximo da origem é o ponto $(1,3)$, cuja soma das coordenadas é 4.

ALTERNATIVA CORRETA: E

3ª QUESTÃO

Considere a sequência de números complexos $z_1 = \ 1+i$,$z_2 = \ 1+i\ ^{2}$,…,$z_{20} = \ 1+i\ ^{20}$, onde $i^2=-1$.

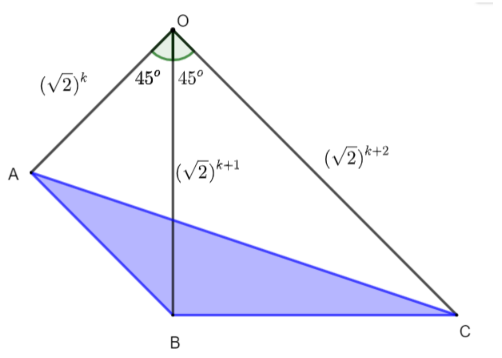
A maior área possível do triângulo formado pelos afixos de três números consecutivos dessa sequência é

(A) 2^{16} (B) 2^{17} (C) 2^{18} (D) 2^{19} (E) 2^{20}

RESOLUÇÃO 3ª QUESTÃO:

$$z_1=(1+i)=\sqrt{2}cis(45^{o})\Rightarrow z_k=(\sqrt{2}cis(45^{o}))^{k}=\left(\sqrt{2}\right)^{k}cis(45^{o}\times k)$$

Portanto, se desenharmos três afixos consecutivos e a origem, a figura (a menos de uma rotação) será como a desenhada abaixo:



$S_{ABC}=S_{AOB}+S_{BOC}-S_{AOC}$

$$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^{k}\times(\sqrt{2})^{k+1}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^{k+1}\times(\sqrt{2})^{k+2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^{k}\times(\sqrt{2})^{k+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{2})^{2k+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{2})^{2k+3}-\frac{2}{4}\times(\sqrt{2})^{2k+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{2})^{2k+1}\times\left(1+(\sqrt{2})^{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{2})^{2k+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{2})^{2k+1}$$

Logo a área será tão maior quanto maior o valor de k

Portanto, fazendo k=18, teremos:

$$S_{máx}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(\sqrt{2})^{2\times18+1}=\frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{37}}{(\sqrt{2})^{4}}=\sqrt{2}^{34}=2^{17}$$

ALTERNATIVA CORRETA: B

4ª QUESTÃO

Seja a equação $x^2-px+q=0$, na variável x, com raízes a e b. Então o valor de a^4+b^4 é

(A) $p^4+4q^2-2p^2q$

(B) $p^4+4q^2-4p^2q$

(C) $p^4+2q^2-4p^2q$

(D) $p^4+4q^2-4p^4q$

(E) $p^4+2q^2-2p^2q$

RESOLUÇÃO 4ª QUESTÃO:

A equação $x^2-px+q=0$ tem raízes a e b

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=p\\ a.b=q\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\ p^2-2q$$

$$\Rightarrow a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+4q^2-2q^2$$

$$\Rightarrow a^4+b^4=p^4+2q^2-4p^2q$$

ALTERNATIVA CORRETA: C

5ª QUESTÃO

Seja α, β e γ as raízes da equação $x^3+6x^2-6x-3=0$.

O valor de $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ é

(A) 12 (B) 18 (C) 27 (D) 33 (E) 42

RESOLUÇÃO 5ª QUESTÃO:

Veja que o polinômio $p(x)=x^3+6x^2-6x-3$ pode ser escrito na forma

$$p(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

A expressão pode ser escrita como

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\lambda+\alpha)=(-6-\gamma)(-6-\alpha)(-6-\beta)$$

Logo

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\lambda+\alpha)=p(-6)\therefore$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\lambda+\alpha)=-216+216+36-3\therefore$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\lambda+\alpha)=33$

ALTERNATIVA CORRETA: D

6ª QUESTÃO

Considere a matriz quadrada $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 \\ 2 & x & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2022 \\ 2 & 0 & x & 2 & 3 & \cdots & 2022 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & x \end{bmatrix}$ de ordem 2024.

A soma das raízes do polinômio dado por $p(x)=det(A), x\in\mathbb{R}$, é

(A) 2024×2023

(B) 2025^2

(C) 2024×2025

(D) 1012×2025

(E) 1011×2023

RESOLUÇÃO 6ª QUESTÃO:

Usando o teorema de Jacobi, subtraindo de cada linha a primeira linha temos

$$p(x)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2021 & 2022 \\ 2 & x & 1 & 2 & \cdots & 2021 & 2022 \\ 2 & 0 & x & 2 & \cdots & 2021 & 2022 \\ 2 & 0 & 1 & x & \cdots & 2021 & 2022 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & 1 & 2 & \cdots & x & 2022 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2021 & x \end{vmatrix}\therefore$$

$$p(x)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2021 & 2022 \\ 0 & x & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-2021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-2022 \end{vmatrix}\therefore$$

$p(x)=2(x-1)(x-2)...(x-2021)(x-2022)$

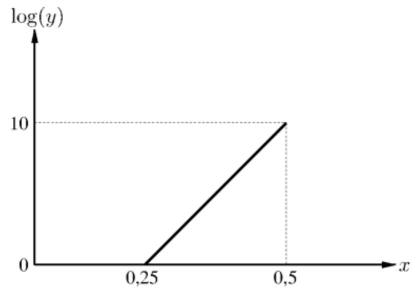
Assim a soma das raízes do polinômio é dada por

$$1+2+3+\ldots+2021+2022=\frac{(1+2022)2022}{2}=1011\times2023$$

ALTERNATIVA CORRETA: E

7ª QUESTÃO

Seja $y = a^{bx-10}$, a e b reais, onde os valores de x e $\log(y)$ são relacionados pelo gráfico abaixo.



Então o valor de $a+b$ é

(A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 50 (E) 60

RESOLUÇÃO 7ª QUESTÃO:

Do gráfico, temos que:

Para $x = 0,25 = \frac{1}{4}$, temos $\log y = 0$, o que nos dá $y = 1$.

Substituindo na função $y = a^{bx-10}$, temos:

$$1 = a^{\frac{b}{4}-10} \Leftrightarrow \frac{b}{4} - 10 = 0 \Leftrightarrow b = 40$$

Para $x = 0,5 = \frac{1}{2}$, temos $\log y = 10$, o que dá $y = 10^{10}$.

$$10^{10} = a^{40\cdot\frac{1}{2}-10} \Leftrightarrow 10^{10} = a^{10} \Rightarrow a = 10$$

Com isso, temos $a+b = 50$.

ALTERNATIVA CORRETA: D

8ª QUESTÃO

São dados os pontos A e B sobre uma circunferência de raio r, de forma que a corda $\overline{AB}$ mede r. Escolhe-se ao acaso um ponto C sobre o maior arco $\widehat{AB}$. A probabilidade da área do triângulo ABC ser maior que $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$ é

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

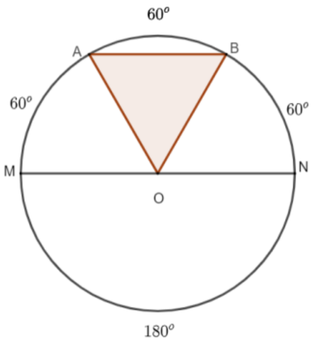
(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{5}$

(E) $\frac{4}{5}$

RESOLUÇÃO 8ª QUESTÃO:

O triângulo tem área que indica que ele é equilátero de lado igual a r.



Com isso, se fizermos $Área = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h$, teremos $\frac{1}{2} \cdot r \cdot h > \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

Isso resulta $h > \frac{r\sqrt{3}}{2}$, o que significa que o ponto C pode estar em qualquer lugar da semicircunferência de diâmetro MN, o que nos dá um caso favorável proporcional ao comprimento dessa curva, ou seja, 180 graus.

Tirando o trecho correspondente ao pequeno arco de 60º entre as extremidades da corda igual a r, temos que os possíveis serão representados por 180 + 60 + 60, ou seja, 300 graus.

Logo, $P = \frac{180}{300} = \frac{3}{5}$.

ALTERNATIVA CORRETA: D

9ª QUESTÃO

Considere a inequação

$$(x^2-100)(x^2-150)(x^2-200)<0.$$

A quantidade de números inteiros que a satisfazem é

(A) 23 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 27

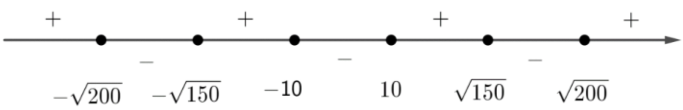
RESOLUÇÃO 9ª QUESTÃO:

Vamos realizar o estudo de sinal da inequação

$$(x^2-100)(x^2-150)(x^2-200)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+10)(x-10)(x+\sqrt{150})(x-\sqrt{150})(x+\sqrt{200})(x-\sqrt{200})<0$$

utilizando o método dos intervalos.



O conjunto-solução nos números reais é $S =]-\sqrt{200}, -\sqrt{150}[\cup]-10, 10[\cup]\sqrt{150}, \sqrt{200}[$.

Os números inteiros que satisfazem a inequação são $\{-14,-13\} \cup \{-9,-8,\ldots,8,9\} \cup \{13,14\}$.

Portanto, há $2+(2\cdot 9+1)+2=23$ números inteiros que satisfazem à inequação.

ALTERNATIVA CORRETA: A

10ª QUESTÃO

Seja $r=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}}}$.

Sobre a inequação $\sqrt{2025+\sqrt{t}}+\sqrt{2025-\sqrt{t}}\le\sqrt{2025r}$ pode-se afirmar que a mesma

(A) não possui solução real

(B) possui uma única solução real

(C) possui exatamente duas soluções reais

(D) possui solução entre 0 e $\dfrac{2025^2}{6}$

(E) possui solução entre $\dfrac{2025^2}{3}$ e $\dfrac{2025^2}{2}$

RESOLUÇÃO 10ª QUESTÃO:

Vamos, inicialmente, obter o valor de r.

$$r=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{12}+\sqrt{18-8\sqrt{2}}}}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{12}+\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}}}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}}=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{3}-1}}}=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\left(\sqrt{3}+1\right)}}=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=$$

$$=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}=\sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}=\sqrt{4}=2$$

Agora vamos resolver a inequação irracional.

$$\sqrt{2025+\sqrt{t}}+\sqrt{2025-\sqrt{t}}\le\sqrt{2025\cdot 2}\Rightarrow\sqrt{45^2+\sqrt{t}}+\sqrt{45^2-\sqrt{t}}\le\sqrt{45^2\cdot 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45^2+\sqrt{t}+45^2-\sqrt{t}+2\sqrt{45^4-t}\le 45^2\cdot 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{45^4-t}\le 0\Rightarrow t=45^4$$

Observe que essa solução satisfaz a inequação original.

Portanto, a inequação possui uma única solução real.

ALTERNATIVA CORRETA: B

11ª QUESTÃO

O número de soluções da equação $cos^3(x)+sen^3(x)+\frac{1}{2}sen(2x)=1$ no intervalo $[0,2\pi)$ é

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

RESOLUÇÃO 11ª QUESTÃO:

$$cos^3x + sen^3x + \frac{1}{2}sen\ 2x = 1$$

$$\Rightarrow (\cos x + sen\ x)(cos^2x - cosx.sen\ x + sen^2x) = 1 - sen\ xcos\ x$$

$$\Rightarrow (\cos x + sen\ x)(1 - senx.cos\ x) = (1 - sen\ xcos\ x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - senx\ cosx = 0 \Rightarrow 2 = 2sen\ x\cos x \Rightarrow sen\ 2x = 2\ (impossível) \\ ou \\ \cos x + sen\ x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}cosx + senx\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Como $x \in [0,2\pi[\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\ ou \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow Há\ duas\ soluções\ no\ intervalo\ citado.$

ALTERNATIVA CORRETA: C

12ª QUESTÃO

Considere um triângulo com vértices em $A(1,2)$, $B(2,2)$ e $C(4,0)$.

A equação da reta que é a bissetriz interna do triângulo referente ao vértice A é

(A) $2x+(3-\sqrt{13})y+(2\sqrt{13}-8)=0$

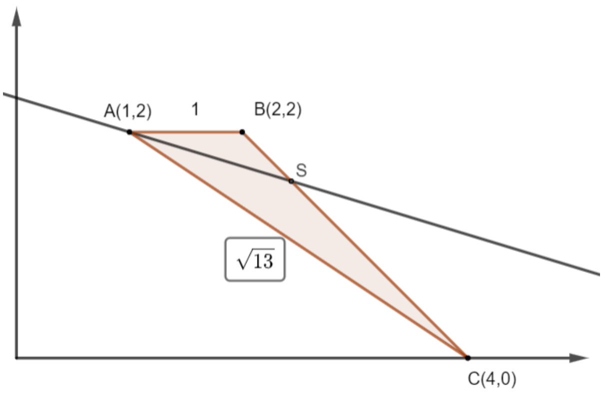
(B) $2x+(3+\sqrt{13})y-(2\sqrt{13}+8)=0$

(C) $x+(4+\sqrt{13})y-(2\sqrt{13}+9)=0$

(D) $x+(4-\sqrt{13})y+(2\sqrt{13}-9)=0$

(E) $(3+\sqrt{13})x+2y-(\sqrt{13}+7)=0$

RESOLUÇÃO 12ª QUESTÃO:



Veja que $AB=1$ e $AC=\sqrt{13}$

Seja S o ponto onde a bissetriz interna do vértice A, corta o lado BC. Usando razão de segmento temos que

$$r = \frac{CS}{SB} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{13}$$

Coordenadas do ponto S

$$x_S = \frac{x_C + r x_B}{1+r} \therefore x_S = \frac{4+\sqrt{13}\cdot 2}{1+\sqrt{13}} \therefore x_S = \frac{2\left(2+\sqrt{13}\right)}{\sqrt{13}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{13}-1\right)}{\left(\sqrt{13}-1\right)} \therefore x_S = \frac{\left(11+\sqrt{13}\right)}{6}$$

$$y_S = \frac{y_C + r y_B}{1+r} \therefore y_S = \frac{0+\sqrt{13}\cdot 2}{1+\sqrt{13}} \therefore y_S = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{13}-1\right)}{\left(\sqrt{13}-1\right)} \therefore y_S = \frac{\sqrt{13}\left(\sqrt{13}-1\right)}{6}$$

Coeficiente angular da reta que passa por A e S

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \therefore m = \frac{\frac{\sqrt{13}\left(\sqrt{13}-1\right)}{6}-2}{\frac{\left(11+\sqrt{13}\right)}{6}-1} \therefore m = \frac{\sqrt{13}\left(\sqrt{13}-1\right)-12}{\left(11+\sqrt{13}\right)-6} \therefore m = \frac{1-\sqrt{13}}{5+\sqrt{13}}$$

Equação da bissetriz (reta que passa por A e S)

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1-\sqrt{13}}{5+\sqrt{13}} \therefore \left(5+\sqrt{13}\right)y - 2\left(5+\sqrt{13}\right) = \left(1-\sqrt{13}\right)x - \left(1-\sqrt{13}\right) \therefore$$

$$\left(1+\sqrt{13}\right)\left(5+\sqrt{13}\right)y - 2\left(1+\sqrt{13}\right)\left(5+\sqrt{13}\right) = \left(1+\sqrt{13}\right)\left(1-\sqrt{13}\right)x - \left(1+\sqrt{13}\right)\left(1-\sqrt{13}\right) \therefore$$

$$\left(18+6\sqrt{13}\right)y - 2\left(18+6\sqrt{13}\right) = -12x - (-12) \therefore$$

$$\left(3+\sqrt{13}\right)y - 2\left(3+\sqrt{13}\right) = -2x + 2 \therefore$$

$$2x + \left(3+\sqrt{13}\right)y - \left(2\sqrt{13}+8\right) = 0$$

ALTERNATIVA CORRETA: B

13ª QUESTÃO

Seja I o incentro do triângulo ABC e L a interseção da semi-reta $\overrightarrow{AI}$ com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC, com A e L distintos.

Dado que $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{BC}$, o valor de $\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}$ é

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

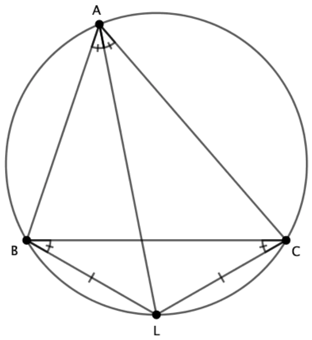
(C) $\frac{3}{2}$

(D) 2

(E) $\frac{5}{2}$

RESOLUÇÃO 13ª QUESTÃO:

Observe a figura abaixo:



Temos que: $\angle BAL$ e $\angle BCL$ estão inscritos no arco $\overset{\frown}{BL}$. Logo, $\angle BAL \equiv \angle BCL$.

Analogamente, temos que: $\angle LBC \equiv \angle CAL$.

Como $\angle BAL \equiv \angle CAL$, temos que: $\angle LBC \equiv \angle LCB$.

Pelo Teorema de Ptolomeu, podemos afirmar que:

$$\overline{AL}\cdot\overline{BC} = \overline{LC}\cdot\overline{AB} + \overline{BL}\cdot\overline{AC} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AL}\cdot\overline{BC} = \overline{BL}\cdot\overline{AB} + \overline{BL}\cdot\overline{AC} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AL}\cdot\overline{BC} = \overline{BL}\cdot(\overline{AB} + \overline{AC}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AL}\cdot\overline{BC} = \overline{BL}\cdot 2\cdot\overline{BC} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}} = \frac{1}{2}$$

ALTERNATIVA CORRETA: A

14ª QUESTÃO

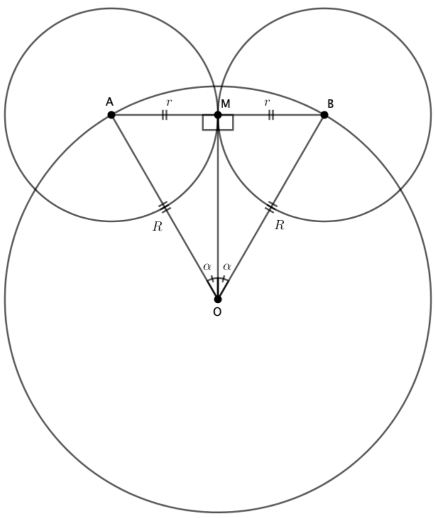
São dados n círculos de mesmo raio r, cujos centros são os vértices de um polígono regular P de n lados, de forma que cada circula tangencia externamente dois outros círculos. Seja R o raio do círculo circunscrito a P.

O valor de n quando $R = 2r$ é

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

RESOLUÇÃO 14ª QUESTÃO:

Observe a figura abaixo:



Temos que AB é um dos lados de P, O é o centro de P e 2α é o ângulo central de P. Logo, $2\alpha = \dfrac{360°}{n} \Leftrightarrow n = \dfrac{180°}{\alpha}$.

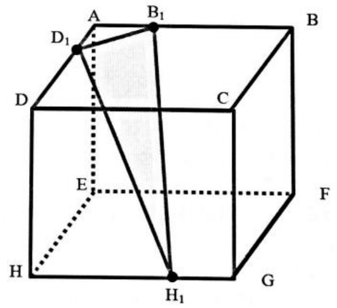
Além disso, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{r}{R} = \dfrac{r}{2r} = \dfrac{1}{2} = \operatorname{sen}30° \Leftrightarrow \alpha = 30°$.

Portanto, $n = \dfrac{180°}{30°} = 6$.

ALTERNATIVA CORRETA: D

15ª QUESTÃO

No cubo $ABCDEFGH$, a aresta mede l. Conforme a figura, o ponto B_1, sobre a aresta AB, é tal que $\overline{AB_1} = l/3$; o ponto D_1, sobre a aresta AD, é tal que $\overline{AD_1} = l/3$ e o ponto H_1, sobre a aresta GH, é tal que $\overline{GH_1} = l/3$.

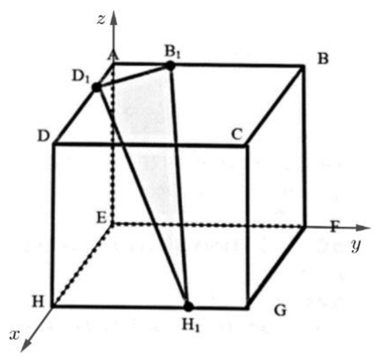


A área do triângulo $B_1D_1H_1$ é

(A) $\dfrac{l^2}{9}$ (B) $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{18}$ (C) $\dfrac{5l^2\sqrt{34}}{18}$ (D) $\dfrac{2l^2\sqrt{2}}{9}$ (E) $\dfrac{l^2\sqrt{34}}{18}$

RESOLUÇÃO 15ª QUESTÃO:

Adotemos um sistema de eixos x, y e z, onde o lado AE estará apoiado no eixo z, o lado EH estará apoiado no eixo x e, finalmente, o lado EF estará apoiado no eixo y, conforme a figura a seguir.



Com isso, temos que o ponto B_1 será dado por $B_1\left(0, \dfrac{l}{3}, l\right)$ e $D_1 = \left(\dfrac{l}{3}, 0, l\right)$.

Seguindo o mesmo raciocínio, o ponto H_1 será dado por $\left(l, \dfrac{2l}{3}, 0\right)$, lembrando que ele dista l/3 de G e, como toda a aresta vale l, ele dista 2l/3 de H.

A ideia é utilizarmos produto vetorial, pois a metade do módulo do produto vetorial formado por 2 vetores de mesma origem, num triângulo, dá a sua área.

Para isso, vamos construir os vetores $\overrightarrow{D_1B_1}$ e $\overrightarrow{D_1H_1}$, que ficam:

$$\overrightarrow{D_1B_1} = B_1 - D_1 = \left(-\frac{l}{3}, \frac{l}{3}, 0\right) \text{ e } \overrightarrow{D_1H_1} = H_1 - D_1 = \left(\frac{2l}{3}, \frac{2l}{3}, -l\right).$$

Lembrem que as coordenadas de um vetor são obtidas fazendo-se extremidade menos origem.

Calculando o produto vetorial entre eles, teremos:

$$\overrightarrow{D_1B_1} \times \overrightarrow{D_1H_1} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -l/3 & l/3 & 0 \\ 2l/3 & 2l/3 & -l \end{vmatrix} = \left(-\frac{l^2}{3}, -\frac{l^2}{3}, -\frac{4l^2}{9}\right)$$

Calculando o módulo do vetor encontrado, temos:

$$\left|\overrightarrow{D_1B_1} \times \overrightarrow{D_1H_1}\right| = \sqrt{\left(-\frac{l^2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{l^2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4l^2}{9}\right)^2} = \frac{l^2\sqrt{34}}{9}$$

Lembrando que, para obter a área do triângulo, devemos dividir tal valor por 2, temos:

$$S_{B_1D_1H_1} = \frac{l^2\sqrt{34}}{18}.$$

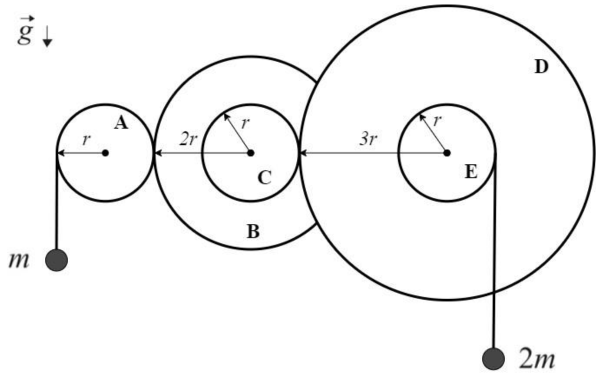
ALTERNATIVA CORRETA: E

Professores:

Alexandre de Azevedo Silva | Gustavo Adolfo Martins Jotta Soares | Marcelo Henrique Pillonetto

Marcelo Xavier | Max Paiva | Renato Madeira | Ricardo Secco | Sérgio João Buffon Jr.

16ª QUESTÃO



Cinco discos A, B, C, D e E, de centros fixos, giram solidariamente conforme a geometria da figura. Duas partículas de massas m e $2m$ enrolam ou desenrolam fios inextensíveis às mesmas velocidades escalares das bordas de seus respectivos discos.

Dados:

• aceleração da gravidade: g;

Observações:

• os cinco discos estão inicialmente em repouso;

• os cinco centros dos discos estão na mesma horizontal;

• o disco A está engrenado ao disco B;

• ao girar, o disco B faz o disco C girar à mesma velocidade angular, pois B e C são concêntricos;

• o disco C está engrenado ao disco D;

• ao girar, o disco D faz o disco E girar à mesma velocidade angular, pois D e E são concêntricos;

• a partícula de menor massa está associada ao disco A e a de maior massa ao disco E;

• despreze as massas dos discos e desconsidere quaisquer deslizamentos.

Pelo princípio da conservação da energia, a aceleração (módulo e sentido) da partícula de maior massa, após o início de seu movimento, é:

(A) 2/19 g, de baixo para cima (enrolando o fio)

(B) 2/19 g, de cima para baixo (desenrolando o fio)

(C) 4/19 g, de baixo para cima (enrolando o fio)

(D) 4/11 g, de cima para baixo (desenrolando o fio)

(E) 4/11 g, de baixo para cima (enrolando o fio)

RESOLUÇÃO 16ª QUESTÃO:

A partir da situação inicial, adotamos $y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = 0$ para os corpos 1 e 2 de massas m e 2m, respectivamente.

(Coordenadas y orientadas para cima.) Logo, por conservação de energia:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} + mgy_1 + 2mgy_2 = 0$$

De acordo com os acoplamentos e com a relação entre os raios:

- os pontos da periferia de D giram o triplo do que os pontos da periferia de E, ou seja, de $3y_2$ em sentido anti-horário;

- os pontos da periferia de C giram o mesmo do que os pontos da periferia de D, de $3y_2$, mas em sentido horário;

- os pontos da periferia de B giram o dobro do que os pontos da periferia de C, ou seja, de $6y_2$ em sentido horário;

- os pontos da periferia de A giram o mesmo do que os pontos da periferia de B, de $6y_2$, mas em sentido anti-horário.

Ou seja, quando a partícula 2 sobe a partícula 1 desce, com: $y_1 = -6y_2$ e $v_1 = -6v_2$. Logo:

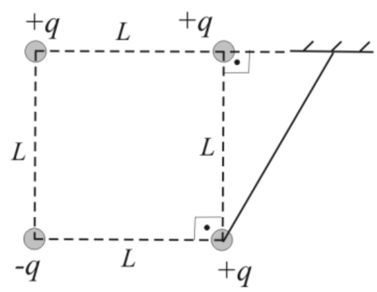
$$\frac{m(-6v_2)^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} + mg(-6y_2) + 2mgy_2 = 0$$

$$38v_2^2 = 0^2 + 2 \cdot 4g \cdot y_2$$

Donde, por analogia com Torricelli: $a_2 = 2g/19$ (vertical para cima)

ALTERNATIVA CORRETA: A

17ª QUESTÃO



Na figura, são mostradas três partículas fixadas e uma quarta partícula pendurada por um fio inextensível. As quatro partículas estão carregadas eletricamente e em equilíbrio nos vértices de um quadrado de lado L.

Dado:

- constante elétrica do meio: k.

Observação:

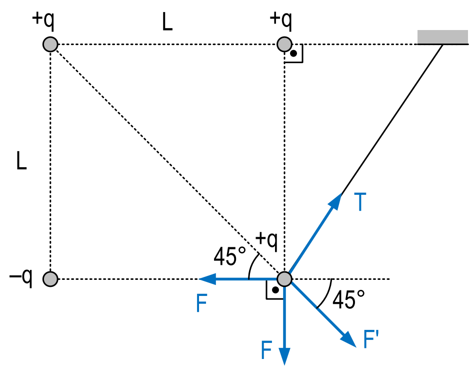
- as cargas de cada partícula estão indicadas na figura.

A tração no fio é:

(A) $2\frac{kq^2}{L^2}$ (B) $\frac{9}{4}\frac{kq^2}{L^2}$ (C) $\frac{3}{2}\frac{kq^2}{L^2}$ (D) $\frac{1}{4}\frac{kq^2}{L^2}\left(4+\sqrt{2}\right)$ (E) $\frac{1}{4}\frac{kq^2}{L^2}\left(2+\sqrt{2}\right)$

RESOLUÇÃO 17ª QUESTÃO:

A figura abaixo ilustra as forças que atuam na carga fixada:



Observe que o módulo de duas das três forças elétricas é idêntico, por isso utilizamos a mesma letra F para representá-las. A terceira força elétrica, que possui um módulo diferente, será representada por F'. Os módulos de F e F' são dados por:

$$F = \frac{kq^2}{L^2} \text{ e } F' = \frac{kq^2}{\left(L\sqrt{2}\right)^2} = \frac{kq^2}{2L^2} = \frac{F}{2}$$

Impondo o equilíbrio de translação:

i) na horizontal:

$$T_x + F'\cos 45° = F \Rightarrow T_x + \frac{F}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = F \Rightarrow T_x = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)F \Rightarrow T_x = \left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right)F$$

ii) na vertical:

$$T_y = F + F'sen45° \Rightarrow T_y = F + \frac{F}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T_y = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)F \Rightarrow T_y = \left(\frac{4+\sqrt{2}}{4}\right)F$$

Logo,

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2$$

$$\therefore T^2 = \left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right)^2 F^2 + \left(\frac{4+\sqrt{2}}{4}\right)^2 F^2$$

$$\therefore T^2 = \underbrace{\left[\left(16 - 8\sqrt{2} + 2\right) + \left(16 + 8\sqrt{2} + 2\right)\right]}_{=36}\frac{F^2}{16}$$

$$\therefore T^2 = \frac{36}{16}F^2 \Rightarrow T = \frac{6F}{4} \Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{2}\frac{kq^2}{L^2}}$$

ALTERNATIVA CORRETA: C

18ª QUESTÃO

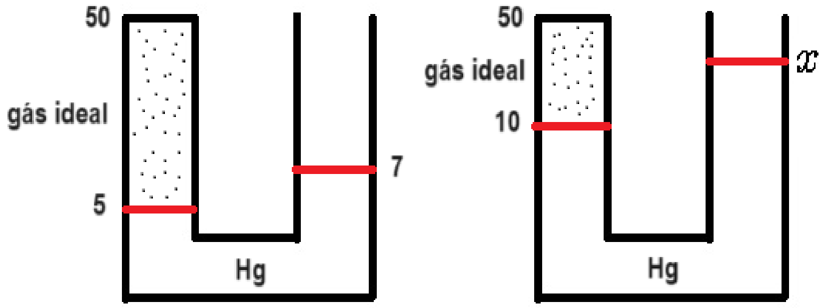


Figura 1 Figura 2

Na Figura 1, é apresentado um manômetro de Hg, graduado em cm, que aprisiona uma certa massa de gás ideal em equilíbrio. Adiciona-se uma nova quantidade de Hg pela extremidade aberta do manômetro e, após o novo equilíbrio, obtém-se a configuração da Figura 2.

Sabendo que a temperatura ambiente se manteve constante, desprezando-se qualquer vazamento de gás e sendo 70 cmHg a pressão atmosférica, o valor da graduação x, em cm, é:

(A) 30 (B) 15 (C) 42 (D) 21 (E) 10

RESOLUÇÃO 18ª QUESTÃO:

Pelo teorema de Stevin, entre os ramos esquerdo e direito do manômetro, em Figura 1, temos:

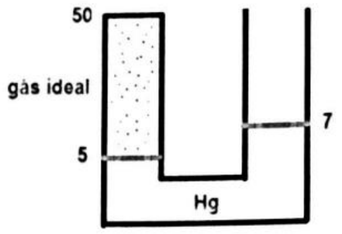


Figura 1

$$P_1 = 70 \text{ cmHg} + (7 - 5) \text{ cmHg} = 72 \text{ cmHg}$$

Como o gás atravessa uma compressão isotérmica entre as Figuras 1 e 2, temos:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

$$P_2 = 72 \cdot (50 - 5)/(50 - 10) = 81 \text{ cmHg}$$

Logo, aplicando o teorema de Stevin na Figura 2:

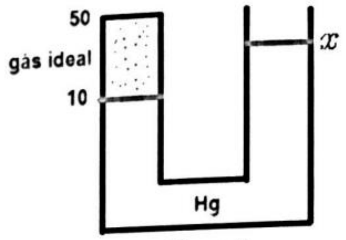


Figura 2

$$81 \text{ cmHg} = 70 \text{ cmHg} + (x - 10) \text{ cmHg}$$

$$x = 21 \text{ (em cm)}.$$

ALTERNATIVA CORRETA: D

19ª QUESTÃO

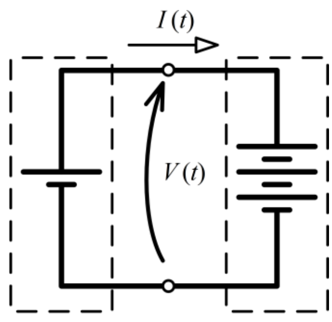


Figura 1

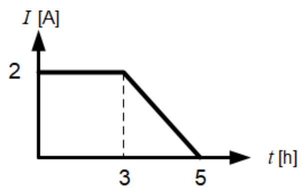


Figura 2a

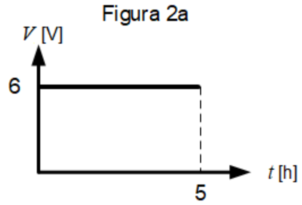


Figura 2b

Considere um sistema de carga de bateria hipotético, mostrada na Figura 1, no qual, os gráficos da corrente $I(t)$ e da tensão $V(t)$ são mostradas nas Figuras 2a e 2b. Ao longo do período de carga, que é de 5 h, a energia fornecida pelo carregador, em kJ, é:

(A) 345,6 (B) 172,8 (C) 129,6 (D) 86,4 (E) 36,0

RESOLUÇÃO 19ª QUESTÃO:

Uma vez que $P_{car} = V \cdot I$, temos $dE_{car}/dt = V \cdot dQ/dt$, que integrando fornece:

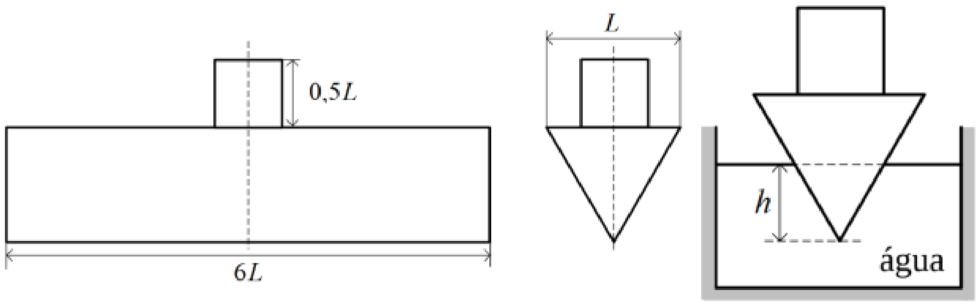
$E_{car} = \int V \cdot dQ = V \cdot \int dQ$ (pois V é constante durante o processo)

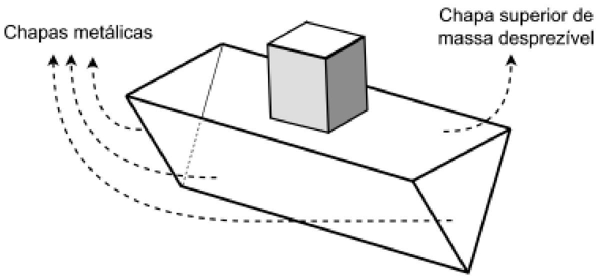
$E_{car} = 6 \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 2/2) = 48$ W·h (pela área do gráfico)

$E_{car} = 172{,}8$ kJ (mediante conversão, com 1h = 3600 s e 1W = 1 J/s).

ALTERNATIVA CORRETA: B

20ª QUESTÃO





Para simular o protótipo de um navio, um engenheiro constrói um prisma reto, com seção reta no formato de um triângulo equilátero, a partir de quatro chapas metálicas (duas triangulares de lado L, duas retangulares $6L \times L$) e uma chapa retangular superior de massa desprezível e dimensões $6L \times L$. A estrutura encontra-se bem vedada e contém ar em seu interior. Uma carga cúbica de aresta $0{,}5L$ é fixada simetricamente sobre o prisma e em conformidade com as figuras. Em seguida, a estrutura (prisma + carga) é colocada numa piscina, afundando h.

<u>Dados:</u>

- massa específica superficial das chapas metálicas: 8 kg/m²;
- massa específica volumétrica da carga cúbica: 240 kg/m³;
- massa específica da água: 1000 kg/m³;
- $L = 20$ cm ;
- $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$;
- $\dfrac{6}{5\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}68$.

Supondo que a estrutura flutue de forma equilibrada, o valor de h, em centímetros, pode ser arredondado para:

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

RESOLUÇÃO 20ª QUESTÃO:

No equilíbrio do sistema, temos:

$$Empuxo = Peso_{total}$$
$$\therefore \mu_L g V_{submerso} = m_{total} g$$
$$\therefore \mu_L V_{submerso} = m_{total}$$
$$\therefore \mu_L \left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot 6L\right) = \rho_{cubo}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \sigma_{chapa}\left(2\cdot L^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 2\cdot 6L^2\right)$$

onde x é o lado do triângulo equilátero correspondente a secção transversal do volume imerso. Assim,

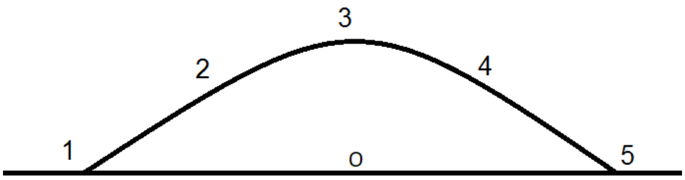
$$x = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo o valor de x na expressão acima, obtemos:

$$\mu_L\left(\frac{4h^2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6L\right) = \rho_{cubo}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \sigma_{chapa}\left(2\cdot L^2\frac{\sqrt{3}}{4} + 2\cdot 6L^2\right)$$
$$\therefore \mu_L\left(2\sqrt{3}h^2L\right) = \rho_{cubo}\frac{L^3}{8} + \sigma_{chapa}L^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\right)$$
$$\therefore \mu_L\left(2\sqrt{3}h^2\right) = \rho_{cubo}\frac{L^2}{8} + \sigma_{chapa}L\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\right)$$
$$\therefore 1000\left(2\sqrt{3}\right)h^2 = 240\cdot\frac{0,2^2}{8} + 8\cdot 0,2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\right)$$
$$\therefore 3400h^2 = 1,2 + 1,6\cdot 12,85$$
$$\therefore 3400h^2 = 21,76$$
$$\therefore h^2 = 0,0064 \Rightarrow h = 0,08m \Rightarrow \boxed{h = 8cm}$$

ALTERNATIVA CORRETA: A

21ª QUESTÃO



Uma fonte sonora é lançada do ponto 1 indicado na figura e segue uma trajetória balística parabólica emitindo um tom de frequência constante f_f. Sejam f_1 a f_5 as frequências percebidas pelo observador "o" quando a fonte passa pelos pontos de 1 a 5, respectivamente, indicados na figura.

<u>Observações:</u>

- os pontos 1 e 5 estão no mesmo plano horizontal;
- os pontos 2 e 4 estão na mesma altitude;
- o ponto 3 é o de maior altitude na trajetória;
- o ponto 1 é aquele imediatamente depois do lançamento;
- o ponto 5 é aquele imediatamente antes do choque com o plano horizontal;
- o observador "o" está na mesma vertical do ponto 3;
- a fonte emite em todas as direções;
- considere a velocidade da fonte muito menor que a do som.

Desta forma, podemos afirmar que:

(A) $f_1 \geq f_2 \geq f_3 = f_f \geq f_4 \geq f_5$

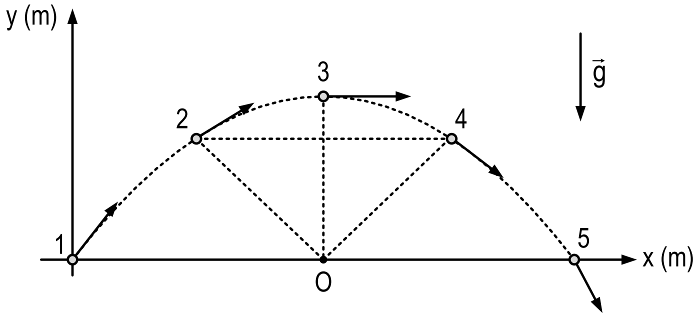
(B) $f_1 = f_5 \geq f_2 = f_5 \geq f_3 = f_f$

(C) $f_1 = f_5 \leq f_2 = f_4 \leq f_3 = f_f$

(D) $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4 \geq f_5 \geq f_f$

(E) $f_1 = f_5 \leq f_3 = f_f \leq f_2 = f_4$

RESOLUÇÃO 21ª QUESTÃO:



No ponto 3, a fonte instantaneamente não possui movimento de aproximação ou de afastamento em relação ao ponto O, assim, podemos concluir que a frequência detectada em O a partir do som emitido em 3 são iguais.

$$f_3 = f_{fonte}$$

A frequência detectada para o som emitido em 1 é dado por:

$$f_1 = f_{fonte}\left(\frac{v_{som}}{v_{som} - v_x}\right) \Rightarrow f_1 > f_{fonte}$$

Logo, a frequência do som emitido em 1 e detectado em O é maior que a frequência da fonte (movimento de aproximação da fonte em relação ao detector).

A frequência detectada para o som emitido em 5 é dado por:

$$f_5 = f_{fonte}\left(\frac{v_{som}}{v_{som} + v_x}\right) \Rightarrow f_5 < f_{fonte}$$

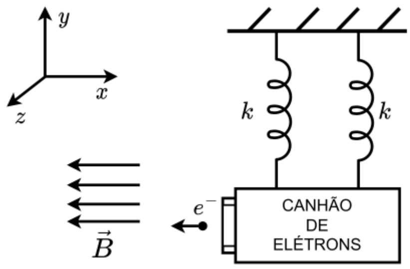
Logo, a frequência do som emitido em 5 e detectado em O é menor que a frequência da fonte (movimento de afastamento da fonte em relação ao detector). Pela simetria da figura, percebe-se que em 2 existe um componente da velocidade na direção da reta que liga ao ponto O com movimento de aproximação em relação ao detector (mas com uma componente de velocidade menor nessa direção). Da mesma forma em 4 existe um componente da velocidade na direção da reta que liga ao ponto O com um movimento de afastamento em relação ao detector. Portanto, podemos concluir que:

$$f_1 > f_2 > f_3 = f_{fonte} > f_4 > f_5$$

OBS: Dependendo do ângulo e da velocidade do lançamento, a frequência nos pontos 2 e/ou 4 pode ser maior que todas as outras, menor que todas as outras, ou qualquer caso intermediário. No entanto, com base nas alternativas e na figura indicada no enunciado, a única alternativa possível é a alternativa A.

ALTERNATIVA CORRETA: A

22ª QUESTÃO



Na figura, é apresentado um canhão oscilando preso ao teto por duas molas e disparando continuamente elétrons numa região sujeita a um campo magnético constante

Dados:

• constante elástica de cada mola: k;

• amplitude de oscilação do canhão / par de molas: A;

• direção de oscilação do canhão / par de molas: y;

• vetor campo magnético: (˘B,0,0);

• velocidade relativa de disparo dos elétrons em relação ao canhão: (˘v,0,0);

• massa do elétron: m;

• massa do canhão: M;

• carga do elétron: ˘e.

Observações:

• o canhão oscila no plano xy;

• a velocidade inicial de um elétron disparado é obtida ao se somarem vetorialmente os efeitos da oscilação e do canhão parado;

• despreze o efeito gravitacional no movimento dos elétrons;

• $m << M$;

• despreze as interações elétricas entre os elétrons.

Nas condições acima, a maior coordenada z que algum elétron pode alcançar é:

(A) $\dfrac{mA\sqrt{2k\dfrac{A^2}{M}+v^2}}{eB}$

(B) $\dfrac{m\sqrt{k\dfrac{A^2}{M}+v^2}}{eB}$

(C) $\dfrac{mA\sqrt{2\dfrac{k}{M}}}{eB}$

(D) $\dfrac{mA\sqrt{\dfrac{k}{M}}}{eB}$

(E) $\dfrac{2mA\sqrt{2\dfrac{k}{M}}}{eB}$

RESOLUÇÃO 22ª QUESTÃO:

A componente de velocidade em x não produzirá força magnética. Apenas a componente y da velocidade produzirá força magnética, produzindo uma rotação no plano yz que combinada com a velocidade em x produzirá trajetórias helicoidais com eixos paralelos ao campo. As trajetórias com maior raio serão as produzidas pelos elétrons ejetados nos momentos de velocidade máxima do MHS:

$$v_{\max} = \omega \cdot A = \sqrt{\frac{2k}{M}} \cdot A$$

Raio da trajetória:

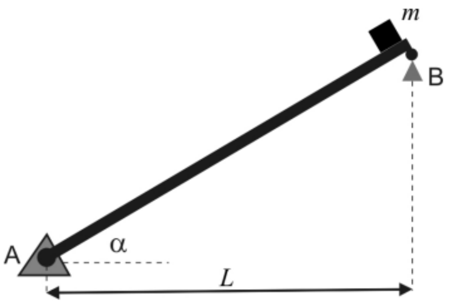
$$R=\frac{mv}{qB}=\frac{m}{eB}\cdot\left(\sqrt{\frac{2k}{M}}\cdot A\right)=\frac{mA}{eB}\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

A coordenada z máxima corresponde a um diâmetro da trajetória:

$$z_{\max}=2R=\frac{2mA}{eB}\sqrt{\frac{2k}{M}}$$

ALTERNATIVA CORRETA: E

23ª QUESTÃO



A figura mostra uma rampa inclinada, de massa desprezível, apoiada por dois suportes fixados nos pontos A e B. O apoio em A admite forças horizontais e verticais e o apoio em B apenas forças verticais. Um objeto de dimensões desprezíveis é liberado do ponto B a partir do repouso e se desloca sem atrito em direção a A.

Dados:

- aceleração da gravidade: g;
- massa do objeto: m;
- ângulo da rampa com a horizontal: α;
- comprimento horizontal da rampa: L.

O módulo da reação de apoio em A quando o objeto estiver passando pelo meio da rampa é igual a:

(A) $\frac{1}{2}mg(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$

(B) $\frac{1}{2}mg$

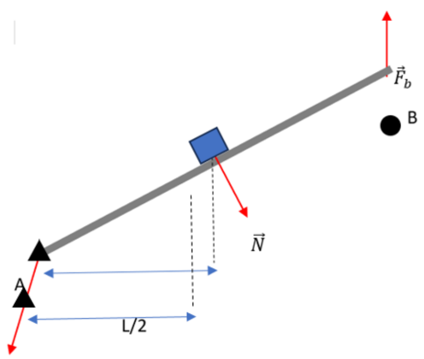
(C) $\frac{1}{2}mg\cos\alpha\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha}$

(D) $\frac{1}{2}mg\cos\alpha\sqrt{\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\alpha}$

(E) $\frac{1}{2}mg\cos\alpha$

RESOLUÇÃO 23ª QUESTÃO:

Abaixo está a representação da situação do problema:



Tamanho da barra:

$$H = \frac{L}{\cos\alpha}$$

Como a barra está em equilíbrio em todos os momentos, faremos primeiro o torque em relação ao ponto A sendo nulo:

$$\tau_A = \tau_N - \tau_{F_b} = 0 \Leftrightarrow \tau_N = \tau_{F_b}$$

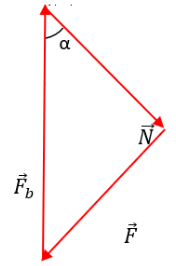
Logo:

$$N \cdot \frac{L}{2\cos\alpha} = F_b \cdot \cos\alpha \cdot \frac{L}{\cos\alpha} \Leftrightarrow F_b = \frac{N}{2\cos\alpha}$$

mas, como o bloco está em equilíbrio na direção normal à rampa:

$$N = mg\cos\alpha \Leftrightarrow F_b = \frac{mg\cos\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{mg}{2}$$

Finalmente, como sabemos que, na barra, as forças: $\vec{N}$, $\vec{F}$ e $\vec{F_b}$ estão em equilíbrio, elas devem formar um triângulo fechado.



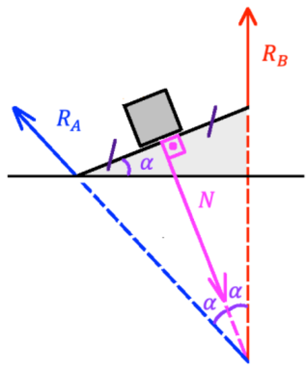
$$F^2 = F_b^2 + N^2 - 2F_bN\cos\alpha = 0{,}5^2(mg)^2 + (mg\cos\alpha)^2 - 2(0{,}5mg)(mg\cos\alpha)\cos\alpha$$
$$= 0{,}5^2(mg)^2 + (mg\cos\alpha)^2 - (mg\cos\alpha)^2 = 0{,}5^2(mg)^2$$

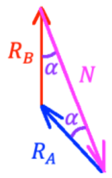
Logo:

$$F = \frac{1}{2}mg$$

2ª SOLUÇÃO:

A barra está em equilíbrio sujeita à ação de 3 forças: a normal N de contato com o objeto, a reação R_A do apoio A e a reação R_B do apoio B. As figuras abaixo representam os equilíbrios de momento (teorema das 3 forças) e de forças (teorema de Lamy) quando o objeto passa pelo ponto médio da rampa:





Logo,

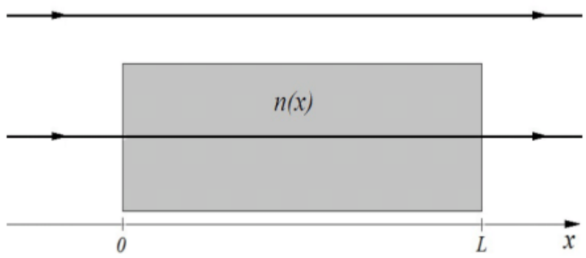
$$R_A = R_B = \frac{N/2}{cos\alpha} = \frac{N}{2cos\alpha}$$

A normal de contato entre a rampa e o objeto é responsável por equilibrar a componente P_N do peso do objeto perpendicular à rampa. Logo:

$$N = P_N = mgcos\alpha \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{N}{2cos\alpha} = \frac{mgcos\alpha}{2cos\alpha} \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{mg}{2}$$

ALTERNATIVA CORRETA: B

24ª QUESTÃO



Dois feixes de luz em fase se propagam no vácuo para a direita paralelamente ao eixo x desenhado na figura. Um dos feixes atravessa um bloco com a forma de um paralelepípedo, em cujo meio o índice de refração é variável, provocando uma diminuição de velocidade e consequente atraso no tempo de viagem.

Dados:

- comprimento de onda do feixe de luz no vácuo: λ;
- comprimento do paralelepípedo: L;
- índice de refração no interior do paralelepípedo: $n(x)=\sqrt{\frac{2L}{L+x}}; 0 \le x \le L$.

O menor valor de L, para que a interferência entre os feixes, em um anteparo à direita do bloco, seja destrutiva, é:

(A) $\frac{\lambda}{2(2+3\sqrt{2})}$ (B) $\frac{\lambda}{3(2\sqrt{2}-2)}$ (C) $\frac{\lambda}{3(2-\sqrt{2})}$ (D) $\frac{\lambda}{2(3+2\sqrt{2})}$ (E) $\frac{\lambda}{2(3-2\sqrt{2})}$

RESOLUÇÃO 24ª QUESTÃO:

Pela Lei de Snell, a velocidade no meio é dada por:

$$v_{meio} = \frac{v_0 n_0}{n(x)} = v_0 \frac{\sqrt{L+x}}{\sqrt{2L}}$$

Assim, podemos escrever que:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \frac{\sqrt{L+x}}{\sqrt{2L}} \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{L+x}} = \frac{v_0}{\sqrt{2L}} dt$$

Integrando, encontramos o tempo gasto para o feixe de luz atravessar o meio:

$$\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{L+x}} = \int_0^\tau \frac{v_0}{\sqrt{2L}} dt \rightarrow \tau = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)L}{v_0}$$

Para que a interferência seja destrutiva, a diferença de fase entre os dois feixes necessariamente é um múltiplo ímpar de π. Logo:

$$\Delta\varphi = \omega\tau - \omega t_0 = 2\pi f \left(\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)L}{v_0} \right) - 2\pi \frac{L}{\lambda} = (2k-1)\pi$$

Como a frequência só depende da fonte, $f = \frac{v_0}{\lambda}$:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)L\right) - 2\pi\frac{L}{\lambda} = (2k-1)\pi \rightarrow L = \lambda \frac{(2k-1)}{2(3-2\sqrt{2})}$$

Como se pede o menor valor de L:

$$L = \frac{\lambda}{2(3-2\sqrt{2})}$$

2ª SOLUÇÃO:

Pela Lei de Snell:

$$v_{meio} = v_0\sqrt{\frac{L+x}{2L}}$$

Logo:

$$v_{meio}^2 = v_0^2\left(\frac{L+x}{2L}\right) \to v_{meio}^2 = \frac{v_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2L}x$$

Se considerarmos que $v'_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$:

$$v_{meio}^2 = v'^2_0 + \frac{v_0^2}{2L}x$$

O que é a equação de Torricelli. Logo, um MRUV com, $a = \frac{v_0^2}{4L}$.

Dessa forma, sabendo que a velocidade que o feixe sai do meio é igual a v_0 $(x = L)$:

$$v_0 = v'_0 + a\tau \to \tau = \frac{1}{a}\left(v_0 - \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right) \to \tau = \frac{4L}{v_0^2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)v_0$$

Logo:

$$\tau = \frac{2\sqrt{2}L}{v_0}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Assim:

$$\Delta\varphi = \omega\tau - \omega t_0 = 2\pi f\left(\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)L}{v_0}\right) - 2\pi\frac{L}{\lambda} = (2k-1)\pi$$

Como a frequência só depende da fonte, $f = \frac{v_0}{\lambda}$:

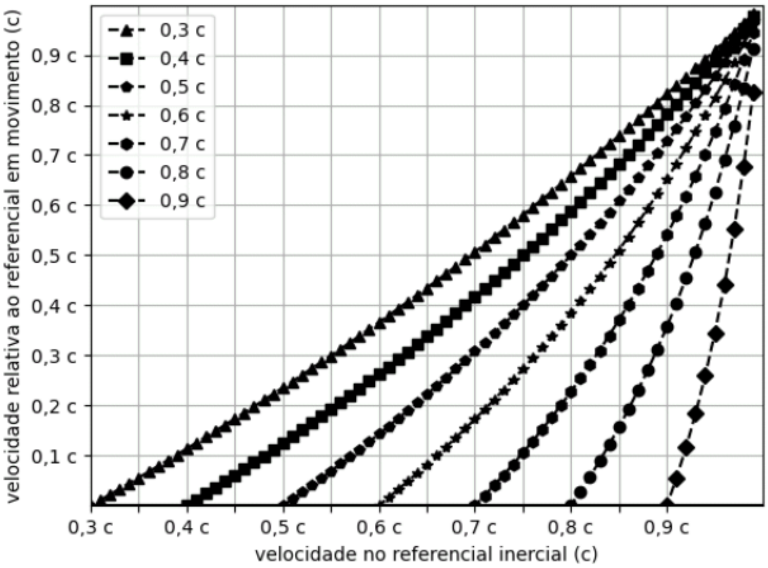
$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)L\right) - 2\pi\frac{L}{\lambda} = (2k-1)\pi \to L = \lambda\frac{(2k-1)}{2(3-2\sqrt{2})}$$

Como se pede o menor valor de L:

$$L = \frac{\lambda}{2(3-2\sqrt{2})}$$

ALTERNATIVA CORRETA: E

25ª QUESTÃO



Na figura, é mostrada a transformação de Lorentz para diversas velocidades (0,3 c a 0,9 c) de um referencial em movimento em relação a um referencial inercial. Essa transformação é usada para calcular a velocidade relativa (eixo vertical) de um outro objeto se movimentando no mesmo sentido do referencial que está em alta velocidade (0,3 c a 0,9 c). Repare que o eixo horizontal exibe uma escala de velocidade em relação ao referencial inercial e o eixo vertical informa a velocidade relativa entre objeto e referencial em movimento.

Uma nave X viaja a 0,5 c e atira um foguete Y, no mesmo sentido de seu movimento, a uma velocidade relativa a X de 0,3 c. Por sua vez, o foguete Y atira um projétil Z, também no mesmo sentido dos movimentos, a uma velocidade relativa a Y de 0,1 c.

Dado:

• velocidade da luz: c.

Em relação ao referencial inercial, a velocidade de Z é aproximadamente:

(A) 0,90 c (B) 0,65 c (C) 0,70 c (D) 0,75 c (E) 0,80 c

RESOLUÇÃO 25ª QUESTÃO:

Mediante composição de movimento, em que $u_{A/B}$ é a velocidade de A em relação a B, temos:

$$u_{Z/X} = (u_{Z/Y} + u_{Y/X})/(1 + u_{Z/Y}\cdot u_{Y/X}/c^2) = (0{,}1c + 0{,}3c)/(1 + 0{,}1\cdot 0{,}3) = 0{,}4c/1{,}03$$

Assim, para o referencial inercial:

$$u_Z = (u_{Z/X} + u_X)/(1 + u_{Z/X}\cdot u_X/c^2) = (0{,}5c + 0{,}4c/1{,}03)/(1 + 0{,}5\cdot 0{,}4/1{,}03) = 0{,}915c/1{,}23 \approx 0{,}75c$$

ALTERNATIVA CORRETA: D

26ª QUESTÃO

Para simular a órbita $\left(x(t),y(t)\right)$ do satélite de um planeta, no referencial do planeta, utilizou-se um modelo unidimensional com as seguintes equações:

$$x(t) = A\cos(\omega t) \qquad y(t) = B\,sen(\omega t)$$

onde A, B e ω são constantes e t é o instante de tempo.

Dados:

- massa do planeta: M;
- massa do satélite: m, onde $m << M$;
- constante universal de gravitação: G;
- $C = \sqrt{A^2 - B^2}$;
- localização do centro do planeta: (C, 0)

A diferença entre a maior e a menor energia potencial gravitacional do satélite é:

(A) $2\ AGmM / B^2$ (B) $CGmM / B^2$ (C) $2\ CGmM / A^2$ (D) $2\ CGmM / B^2$ (E) $AGmM / C^2$

RESOLUÇÃO 26ª QUESTÃO:

Da relação trigonométrica fundamental, temos:

$$sen^2(\omega t) + cos^2(\omega t) = 1 \ \rightarrow \ \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Elipse de semieixo maior A na direção x e de semieixo menor B na direção y.

Do enunciado, temos:

$$C = \sqrt{A^2 - B^2} \ \rightarrow \ A^2 = B^2 + C^2$$

Logo, C é a semi distância focal da elipse e o planeta está localizado no foco à direita da origem do sistema de coordenadas cartesianas.

A mínima e a máxima distâncias do satélite ao planeta são dadas por:

$$d_{min} = A - C \ ; \ d_{max} = A + C$$

Logo. A mínima e a máxima energia potencial gravitacional é dada por:

$$E_{pot,mín} = -\frac{GMm}{A - C} \ ; \ E_{pot,max} = -\frac{GMm}{A + C}$$

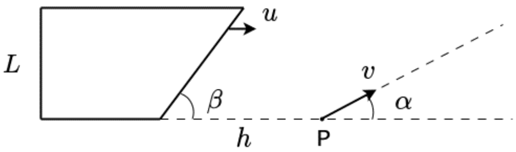
Finalmente, a diferença entre as energias potenciais gravitacionais é dada por:

$$\Delta E_{pot} = E_{pot,max} - E_{pot,mín} = -\frac{GMm}{A + C} - \left(-\frac{GMm}{A - C}\right) = \frac{(-A + C + A + C)GMm}{A^2 - C^2}$$

$$\Delta E_{pot} = \frac{2CGMm}{B^2}$$

ALTERNATIVA CORRETA: D

27ª QUESTÃO



Um trapézio retângulo desloca-se para a direita à velocidade escalar constante u. No instante inicial, um de seus vértices está à distância h do ponto P. Ainda nesse instante, um objeto parte do ponto P à velocidade constante v, indicada na figura juntamente com outras grandezas.

O valor mínimo de v para que o objeto não seja atingido pelo trapézio, onde $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, é

(A) $\dfrac{u}{sen(\beta - \alpha)/sen\beta + h\ sen\alpha / L}$

(B) $\dfrac{u\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta) + h\ sen\alpha / L}$

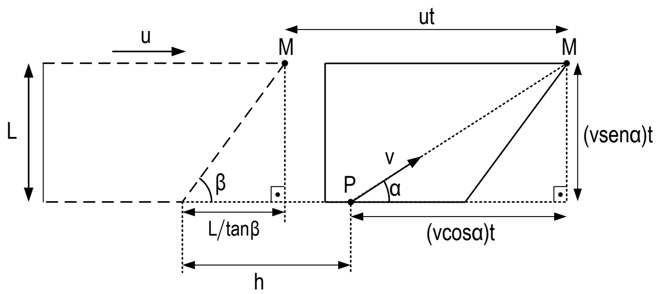
(C) $\dfrac{u\,sen\beta}{sen\beta + h\ sen\alpha / L}$

(D) $\dfrac{u\ sen\beta}{sen(\beta+\alpha) + h\ sen\alpha / L}$

(E) $\dfrac{u}{\cos\alpha + h\ sen\alpha\ \cos\beta / L}$

RESOLUÇÃO 27ª QUESTÃO:

A figura abaixo ilustra a situação descrita no enunciado.



Observe que na situação de mínimo v os pontos P e M se encontram na posição indicada na figura acima. Assim, temos

$$(vsen\alpha)t = L \Rightarrow t = \frac{L}{vsen\alpha}$$

e

$$ut = \left(h - \frac{L}{\tan\beta}\right) + v\cos\alpha\, t$$

$$\therefore u\frac{L}{vsen\alpha} = \left(h - \frac{L}{\tan\beta}\right) + v\cos\alpha\left(\frac{L}{vsen\alpha}\right)$$

$$\therefore u\frac{L}{vsen\alpha} = h - \frac{L}{\tan\beta} + \frac{L\cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\therefore u\frac{L}{vsen\alpha} = h + L\left(\frac{\cos\alpha}{sen\alpha} - \frac{\cos\beta}{sen\beta}\right)$$

$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{h}{L}sen\alpha + \left(\cos\alpha - \frac{sen\alpha\cos\beta}{sen\beta}\right)$$

$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{h}{L}sen\alpha + \left(\frac{\cos\alpha\, sen\beta - sen\alpha\cos\beta}{sen\beta}\right)$$

$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{h}{L}sen\alpha + \frac{sen(\beta-\alpha)}{sen\beta}$$

$$\therefore \boxed{v = \frac{u}{\frac{sen(\beta-\alpha)}{sen\beta} + \frac{h}{L}sen\alpha}}$$

ALTERNATIVA CORRETA: A

28ª QUESTÃO

Uma lente convergente é construída usando um material de índice de refração n, podendo a sua distância focal f ser calculada usando a equação dos fabricantes de lentes. Um objeto é posicionado no eixo da lente e muito distante da mesma.

Observações:

• f é proporcional a $(n-1)^{-1}$;

• $n>1$;

• seja x tal que $|x|<<1$, então $(1-x)^{-1} \simeq 1+x$.

Caso haja uma ínfima variação na constituição do índice de refração do material $(n \to n+\Delta n)$, a variação Δi na posição final da imagem do objeto ¿ $(i \to i+\Delta i)$ é, aproximadamente:

(A) $f\Delta n/n$ (B) $f\Delta n/(n-1)$ (C) $-f\Delta n/(n-1)$ (D) $-f\Delta n/(n^2-1)$ (E) $f\Delta n/(n^2-1)$

RESOLUÇÃO 28ª QUESTÃO:

A distância focal f, de acordo com o enunciado (e com a fórmula dos fabricantes) é diretamente proporcional à $(n-1)^{-1}$. Logo, as distâncias focais inicial e final são dadas por:

$$f = \frac{k}{n-1} \quad ; \quad f' = \frac{k}{n+\Delta n-1}$$

Logo:

$$\frac{f'}{f} = \frac{k}{(n+\Delta n-1)} \cdot \frac{(n-1)}{k} = \frac{(n-1)}{(n+\Delta n-1)}$$

Portanto, a diferença entre as distâncias focais é dada por:

$$f' - f = \frac{(n-1)f}{(n+\Delta n-1)} - f = \frac{(n-1-n-\Delta n+1)f}{(n+\Delta n-1)} = \frac{-f\Delta n}{(n+\Delta n-1)}$$

Dado que o objeto está muito distante da lente, as imagens se formarão nos respectivos focos imagem. Logo:

$$f' - f = i + \Delta i - i = \Delta i \quad \to \quad \Delta i = \frac{-f\Delta n}{(n+\Delta n-1)}$$

Dados que $\Delta n \ll n$, temos que $(n+\Delta n-1) \cong (n-1)$.

Logo:

$$\Delta i \cong \frac{-f\Delta n}{(n-1)}$$

ALTERNATIVA CORRETA: C

29ª QUESTÃO

Em uma prática de laboratório, a superfície externa de uma parede é integralmente recoberta com um material isolante térmico. Por sua vez, a superfície interna encontra-se exposta a uma chama.

Dados:

- condutividade térmica da parede: 3 W/(m.°C);
- condutividade térmica do material isolante: 0,02 W/(m.°C);
- espessura da parede: 15 cm;
- espessura do material isolante: 4 mm;
- temperatura na superfície livre do isolante: 45 °C;
- temperatura na superfície da parede em contato com a chama: 295 °C;
- calor latente de fusão do gelo: 336 J/g;
- dimensões da parede e da camada isolante: 2 $m \times 0{,}84\ m$.

A massa de gelo máxima, em kg, que a energia incidente na parede é capaz de fundir em uma hora de experimento é:

(A) 1,5 (B) 1,8 (C) 15 (D) 18 (E) 20

RESOLUÇÃO 29ª QUESTÃO:

No estado estacionário, temos:

$$\varphi_{parede} = \varphi_{isolante}$$
$$\therefore \frac{k_p \cancel{A}(T_i - T)}{e_p} = \frac{k_i \cancel{A}(T - T_e)}{e_i}$$
$$\therefore \frac{3 \cdot (295 - T)}{15} = \frac{0{,}02 \cdot (T - 45)}{0{,}4}$$
$$\therefore 295 - T = \frac{T - 45}{4} \Rightarrow T = 245°C$$

A quantidade de calor que incide na parede é dada por:

$$Q = \varphi_{parede} \Delta t$$
$$\therefore mL_{fusão} = \varphi_{parede} \Delta t$$
$$\therefore mL_{fusão} = \frac{k_p A(T_i - T)}{e_p} \Delta t$$

Substituindo os valores fornecidos, temos:

$$mL_{fusão} = \frac{k_p A(T_i - T)}{e_p} \Delta t$$
$$\therefore m \cdot 336 \cdot 10^3 = \frac{3 \cdot (2 \cdot 0{,}84)(295 - 245)}{15 \cdot 10^{-2}} \cdot 3600$$
$$\therefore \boxed{m = 18kg}$$

ALTERNATIVA CORRETA: D

30ª QUESTÃO

Em uma determinada região esférica do espaço, a distribuição volumétrica de cargas é tal que o campo elétrico em seu interior é o vetor $E(r)\hat{u}_r$, onde $\hat{u}_r$ é o vetor unitário na direção radial e $E(r)$, em V/m, é igual a:

$$E(r) = \begin{cases} A\cos\left(\dfrac{3r\pi}{2R}\right) + \dfrac{(2-r)^2}{R} - 1, & 0 \le r \le R; \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

em que A é uma constante, r é a distância até o centro da esfera e R é o raio da esfera, em metros.

Observação:

- $R < 3\ m$.

Com as condições impostas acima, a constante A, em V/m, necessariamente é:

(A) –2 (B) 2 (C) –3 (D) 3 (E) 0

RESOLUÇÃO 30ª QUESTÃO:

Para haver continuidade no campo entre região interna e a região externa da esfera em $r = R$, temos:

$$A\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{(2-R)^2}{R} - 1 = 0 \quad \to \quad 4 - 4R + R^2 = R \quad \to \quad R^2 - 5R + 4 = 0$$

$$R = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad \to \quad \begin{cases} R = 1 \\ R = 4 \end{cases}$$

Do enunciado temos que $R < 3$, logo: $R = 1$

No centro ($r = 0$) da distribuição esférica de cargas não há carga, logo, de acordo com a Lei de Gauss, não há campo. Portanto:

$$A\cos(0) + \frac{(2-0)^2}{1} - 1 = 0 \quad \to \quad A + 4 - 1 = 0 \quad \to \quad A = -3$$

ALTERNATIVA CORRETA: C

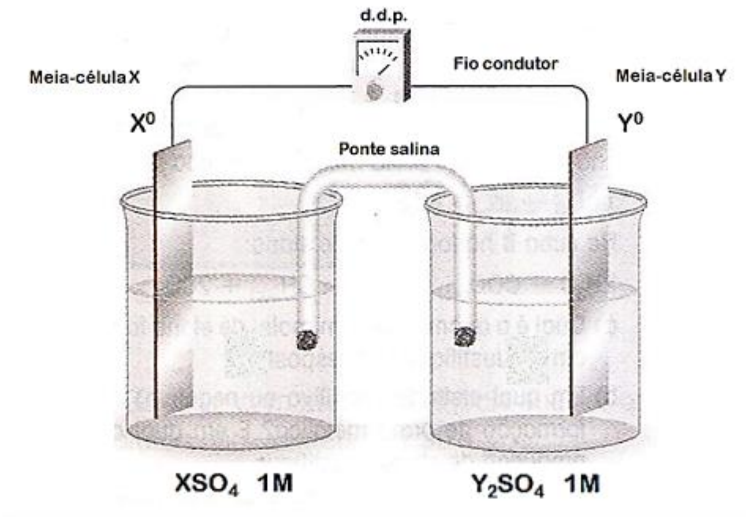
Professores:

Alexandre Oliveira | Antônio José | Bruno Pompeo | Matheus Pinheiro

Ramaton Ramos | Raul Morais | Ulisses Castro

31ª QUESTÃO

A figura a seguir mostra esquematicamente um dispositivo eletroquímico composto pelas meias-células X e Y.



Dados: Potenciais-padrão de redução das espécies químicas envolvidas.

$E_X^o = -1{,}85\ V$	$E_Y^o = -2{,}93\ V$

Com base no esquema eletroquímico apresentado na figura e nos dados fornecidos, analise as proposições a seguir na condição do circuito fechado.

I. A semirreação representada pela equação estequiométrica $X^0 \rightarrow X^{+2} + 2\,e^-$ é espontânea por ser de oxidação.

II. O fluxo de elétrons ocorre no sentido horário, indo do anodo para catodo.

III. A corrente iônica circula pelos eletrodos e fios metálicos.

IV. O eletrodo da meia-célula X é o catodo onde ocorre reação de redução.

V. As reações eletroquímicas podem ser representadas pelas seguintes equações estequiométricas:

$X^{+2} + 2\,e^- \rightarrow X^0$

$2Y^0 \rightarrow 2Y^+ + 2\,e^-$

A opção que apresenta APENAS afirmativas verdadeiras é:

(A) I e III. (B) II, III e IV. (C) I e V. (D) IV e V. (E) II e V.

RESOLUÇÃO 31ª QUESTÃO:

Pela imagem apresentada no enunciado, o dispositivo eletroquímico trata-se de uma pilha (reações espontâneas). Como X possui maior potencial de redução, este irá reduzir (catodo) enquanto o Y irá oxidar (anodo). Com isso, vamos analisar as afirmativas.

I. Falso. A semirreação apresentada não necessariamente será espontânea. Depende das condições em que irá ocorrer. Basta observar que

$$\Delta E = \Delta E^0 - \frac{RT}{nF}\ln Q$$

II. Falso. O fluxo de elétrons vai do anodo para o catodo, porém, seguindo o esquema proposto no enunciado, irá fluir no sentido anti-horário.

III. Falso. A corrente iônica circula pela ponte salina.

IV. Verdadeiro. O X possui maior potencial de redução, logo será o catodo onde ocorrerá a redução da pilha.

V. Verdadeiro. Como mencionado anteriormente, X irá reduzir enquanto Y irá oxidar. Sabendo que o ânion sulfato é da forma SO_4^{2-} pode-se concluir que as reações eletroquímicas serão:

Oxidação (anodo): $2Y \rightarrow 2Y^{+} + 2e^{-}$

Redução (catodo): $X^{2+} + 2e^{-} \rightarrow X$

Com isso, IV e V são verdadeiras.

ALTERNATIVA CORRETA: D

32ª QUESTÃO

Uma mistura de um monoácido orgânico e um monoálcool primário, em uma proporção molar 1: 2, foi tratada com uma quantidade catalítica de ácido sulfúrico concentrado sob condições de volume e temperatura constantes. Após um período de reação suficientemente longo, em um sistema fechado, foi observado que a reação apresentou uma conversão de 87,5% do monoácido.

Se o mesmo tratamento for aplicado a uma mistura equimolar desses mesmos compostos, a conversão esperada do monoácido e o grupo funcional do produto principal serão:

(A) 67,2%; éster. (B) 67,2%; éter. (C) 70,0%; éster. (D) 70,0%; éter. (E) 87,5%; éster.

RESOLUÇÃO 32ª QUESTÃO:

Nessa questão, ele começa descrevendo um equilíbrio onde o número de mols inicial de ácido é n_0 e o de álcool é $2n_0$, reagindo sob uma solução concentrada de ácido sulfúrico de volume V e a uma temperatura T. O quadro que representa a situação é o seguinte:

Nº de mols	$R_1\text{COOH}$	+	$R_2\text{OH}$	$\leftrightarrow$	$R_1\text{COO}R_2$	+	H_2O
Início	n_0		$2n_0$		0		0
Que reage	$-0{,}875n_0$		$-0{,}875n_0$		$+0{,}875n_0$		$+0{,}875n_0$
No equilíbrio	$0{,}125n_0$		$1{,}125n_0$		$0{,}875n_0$		$0{,}875n_0$

A constante do equilíbrio é escrita como:

$$K = \frac{[R_1\text{COO}R_2][\text{H}_2\text{O}]}{[R_1\text{COOH}][R_2\text{OH}]} = \frac{\frac{0{,}875n_0}{V}\frac{0{,}875n_0}{V}}{\frac{0{,}125n_0}{V}\frac{1{,}125n_0}{V}} = 5{,}444$$

Utilizando o mesmo volume e temperatura, porém com uma razão equimolar dos reagentes, temos:

Nº de mols	$R_1\text{COOH}$	+	$R_2\text{OH}$	$\leftrightarrow$	$R_1\text{COO}R_2$	+	H_2O
Início	n_0		n_0		0		0
Que reage	$-\alpha n_0$		$-\alpha n_0$		$+\alpha n_0$		$+\alpha n_0$
No equilíbrio	$(1-\alpha)n_0$		$(1-\alpha)n_0$		αn_0		αn_0

$$K = \frac{[R_1\text{COO}R_2]}{[R_1\text{COOH}][R_2\text{OH}]} = \frac{\frac{\alpha n_0}{V}\frac{\alpha n_0}{V}}{\frac{(1-\alpha)n_0}{V}\frac{(1-\alpha)n_0}{V}} = 5{,}444 \rightarrow \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} = 5{,}444$$

Resolvendo a equação do 2º grau, e pegando a solução que respeita a restrição $\alpha \leq 1$, obtém-se:

$$\alpha = 0{,}7 = 70\%$$

Essa é a conversão esperada do ácido. Como essa reação é uma esterificação de Fischer, o seu produto orgânico formado é um éster.

ALTERNATIVA CORRETA: C

33ª QUESTÃO

Para uma solução aquosa contendo sacarose em m kg de água, a diferença entre as temperaturas de ebulição e de congelamento, à pressão de 1 atm, é de ΔT em K. A massa molar da sacarose é M $g.mol^{-1}$ e as constantes ebulioscópica e crioscópica da água são, respectivamente, K_e e K_c, expressas em $K.kg.mol^{-1}$.

A expressão que indica o valor da massa de sacarose em gramas, na solução, é:

(A) $Mm(\Delta T - 100)/(K_e + K_c)$

(B) $2Mm\Delta T/(K_e + K_c)$

(C) $Mm\Delta T/(K_e - K_c)$

(D) $2Mm(\Delta T - 100)/(K_e - K_c)$

(E) $Mm(\Delta T - 50)/(K_e + K_c)$

RESOLUÇÃO 33ª QUESTÃO:

$$\Delta T_e = K_e W i \rightarrow T_e - 100 = K_e W i \ (i)$$
$$\Delta T_c = K_c W i \rightarrow 0 - T_c = K_c W i \ (ii)$$

Somando a primeira equação com a segunda, tem-se que:

$$(T_e - T_c) - 100 = Wi(K_e + K_c)$$

Pelo enunciado, como trata-se de sacarose temos que $i = 1$ e que $\Delta T = T_e - T_c$. Logo:

$$\Delta T - 100 = \frac{\frac{m_{sacarose}}{M}}{m}(K_e + K_c) \rightarrow m_{sacarose} = \frac{Mm(\Delta T - 100)}{(K_e + K_c)}$$

ALTERNATIVA CORRETA: A

34ª QUESTÃO

Uma solução foi preparada com 1800 g de ácido sulfúrico puro e 2000 L de água deionizada, sendo, em seguida, eletrolisada. Uma amostra de 100 mL da solução resultante foi titulada com solução-padrão 0,1 M de hidróxido de sódio, tendo sido necessários 20,4 mL dessa solução para neutralizar a amostra. Considere que a massa específica do ácido sulfúrico vale 1800 $g.L^{-1}$ e que misturas desse ácido em água se comportam idealmente no que se refere ao volume de mistura.

A alternativa que contém o volume aproximado de gás gerado na eletrólise, em m^3, medido nas CNTP, é:

(A) 187,5

(B) 250

(C) 375

(D) 500

(E) Não é gerado gás algum e a solução apenas aquece pela passagem da corrente elétrica.

RESOLUÇÃO 34ª QUESTÃO:

A titulação do H_2SO_4 após a eletrólise nos fornece a concentração final da solução:

$$H_2SO_4 + 2NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$$

$$n_{NaOH} = 20{,}4\, mL \times 0{,}1\, mol \cdot L^{-1} = 2{,}04\, mmol$$

$$n_{H_2SO_4} = 1{,}02\, mmol$$

Assim, a concentração final é:

$$C_F(H_2SO_4) = \frac{1{,}02mmol}{100mL} = 0{,}0102\, mol \cdot L^{-1}$$

A eletrólise do ácido sulfúrico é a eletrólise da água:

$$SRC: 2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2(g)$$

$$SRA: H_2O(l) \rightarrow \frac{1}{2}O_2(g) + 2e^- + 2H^+$$

$$Global: H_2O(l) \rightarrow H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

Assim, o volume final da solução é calculado pela sua concentração final, pois o número de mol de H_2SO_4 é constante:

$$0{,}0102\frac{mol}{L} = \frac{\frac{1800}{98}mol}{V_F} \Longrightarrow V_F \approx 1800\, L$$

Assim, o volume de água que foi eletrolisado é de 200 L, o que corresponde a um número de mol igual a:

$$\Delta n_{H_2O} = \frac{200 \cdot 10^3}{18}\, mol$$

O número de mol de gases produzido é 1,5 vezes o número de mol de água consumido:

$$n_{gases} = 1{,}5 \times \frac{200 \cdot 10^3}{18}\, mol$$

O volume nas CNTP é dado por:

$$V = 1{,}5 \times \frac{200 \cdot 10^3}{18}\, mol \times 22{,}4\frac{L}{mol} \approx 374 \cdot 10^3\, L$$

Ou seja, aproximadamente 375 m^3

ALTERNATIVA CORRETA: C

35ª QUESTÃO

Em todos os seres vivos, as proteínas são um importante grupo de substâncias. Sobre a estrutura das proteínas, analise as afirmativas abaixo.

I. A estrutura primária de uma proteína é a sequência de alfa-aminoácidos, tais como glicina, alanina e citosina, ligados por ligações peptídicas.

II. A estrutura secundária é mantida por ligações de hidrogênio entre os grupos $-NH$ e $C=O$, próximos entre si, na disposição espacial da proteína.

III. A estrutura terciária é estabilizada por interações hidrofóbicas, hidrofílicas, iônicas e ligações dissulfeto.

IV. A estrutura quaternária refere-se ao arranjo de múltiplas subunidades polipeptídicas que podem, por ação de agentes químicos ou físicos, ser alteradas ou destruídas através do fenômeno conhecido como desnaturação proteica, perdendo sua atividade biológica.

V. As proteínas apresentam estruturas geométricas de vários tipos e podem ser caracterizadas pela produção de colorações, como por exemplo, a reação da proteína da pele com ácido nítrico, formando uma coloração azulada.

A opção que apresenta APENAS afirmativas verdadeiras é:

(A) I e IV. (B) II e V. (C) I, II e III. (D) II, III e IV. (E) III e V.

RESOLUÇÃO 35ª QUESTÃO:

I. FALSO - A citosina é uma base nitrogenada, logo não participa da constituição das proteínas que são polímeros de aminoácidos.

II. VERDADEIRO – A formação de pontes de hidrogênio intramoleculares permite a formação a estrutura secundária das proteínas.

III. VERDADEIRO – A estrutura terciária é estabilizada com o auxílio de uma grande diversidade de interações, como pontes de hidrogênio, ligações dissulfeto, iônicas, hidrofílicas e hidrofóbicas.

IV. VERDADEIRO – A estrutura quaternária é formada pela combinação de diferentes unidades de polipeptídeo, assim acaba apresentando uma conformação espacial que determina sua função. Se essa proteína desnaturar sua conformação é destruída e a proteína perde sua atividade biológica.

V. FALSO – As proteínas são caracterizadas por suas cargas através da técnica da eletroforese e o ácido nítrico (HNO_3), ao reagir com a pele produz coloração amarela.

ALTERNATIVA CORRETA: D

36ª QUESTÃO

Analise as afirmativas abaixo.

I. A imersão de limalha de ferro em um béquer aberto contendo uma solução de ácido clorídrico provoca a liberação de bolhas de gás. Nesse processo, não há realização nem recebimento de trabalho.

II. Uma solução de ácido iodídrico de concentração igual a $1{,}0 \times 10{-}8\ mol.L^{-1}$ tem pH igual a 8.

III. Se dois béqueres, um contendo água pura e o outro contendo uma solução insaturada de sacarose, forem submetidos ao aquecimento, a solução de sacarose ebulirá a uma temperatura constante e superior à temperatura de ebulição da água pura.

IV. Para a reação de combustão completa do gás metano, gerando apenas produtos gasosos, as variações de entalpia e de energia interna têm o mesmo valor.

A única alternativa CORRETA é:

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

(D) Apenas a afirmativa IV é verdadeira.

(E) Todas as afirmativas são falsas.

RESOLUÇÃO 36ª QUESTÃO:

I. (F),

$Fe\ (s) + 2HCl\ (aq) \rightarrow FeCl_2\ (aq) + H_2\ (g)$

Há realização de trabalho pelo gás formado que sofre expansão.

II. (F), considerando que o ácido está muito diluído e considerando a autoionização da água:

$H_2O\ (l) + H_2O\ (l) \rightarrow H_3O^+\ (aq) + OH^-\ (aq)$

$1 \times 10^{-7} \qquad 1 \times 10^{-7}$

$pH = -\log [H_3O^+]$

$pH = -\log (1 \times 10^{-7})$

$pH = 7$

III. (F), pela ebulioscopia a solução de sacarose apresentará temperatura de ebulição superior à da água pura (ebulioscopia), mas não será constante.

IV. (V),

$CH_4\ (g) + 2O_2\ (g) \rightarrow CO_2 + 2H_2O\ (g)$

na combustão do metano a entalpia é igual à energia interna, pois não há variação de volume.

ALTERNATIVA CORRETA: D

37ª QUESTÃO

Uma mistura dos sais hidratados $Na_2SO_4 \cdot 10\ H_2O$ e $Na_2CO_3 \cdot 10\ H_2O$, com massa de 602 kg, é aquecida até a temperatura suficiente para a remoção total da água de hidratação. A massa final da mistura de sais anidros é 242 kg.

Dados:

$M_{H_2O} = 18{,}0\ kg.kmol^{-1}$	$M_{Na_2SO_4} = 142\ kg.kmol^{-1}$	$M_{Na_2CO_3} = 106\ kg.kmol^{-1}$

A razão molar Na_2SO_4 / Na_2CO_3 entre os sais anidros é:

(A) 1,34 (B) 0,85 (C) 1,13 (D) 1,41 (E) 0,71

RESOLUÇÃO 37ª QUESTÃO:

Tomando $x =$ número de kmols de $\mathrm{Na_2SO_4.10H_2O}$ e $y =$ número de kmols de $\mathrm{Na_2CO_3.10H_2O}$, temos o sistema:

Obs: kmol = 1000 mol

$$(142 + 10 \times 18)x + (106 + 10 \times 18)y = 602$$
$$142x + 106y = 242$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = \frac{5}{6}$ e $y = \frac{7}{6}$. Como o pedido é a razão $\frac{x}{y} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}} = \frac{5}{7} = 0{,}71$

ALTERNATIVA CORRETA: E

38ª QUESTÃO

Óxido de ferro II pode ser reduzido a ferro, tanto por carbono, como por monóxido de carbono, de acordo com o mostrado nas equações 1 e 2:

1. $FeO(s) + C(s) \rightarrow Fe(s) + CO(g)$
2. $FeO(s) + CO(g) \rightarrow Fe(s) + CO2(g)$

Os valores de entalpia de formação e de entropia-padrão das substâncias envolvidas em ambas reações são apresentados na tabela:

	$FeO(s)$	$Fe(s)$	$C(s)$	CO(g)	$CO_2(g)$
$\Delta H_f^o\ (kJ.mol^{-1})$	–271,9	0	0	–110,5	–393,5
$S^o\ (J.K^{-1}.mol^{-1})$	60,8	27,3	5,7	197,9	213,7

Considere um meio reacional fechado onde ocorrem as duas reações e que os valores acima permanecem constantes na faixa de 298 a 650 K.

A ÚNICA alternativa correta é:

(A) A reação 1 é exotérmica e a reação 2 é endotérmica.

(B) À temperatura aproximada de 627 K, a reação 2 atinge o equilíbrio dinâmico.

(C) À temperatura de 450 K, a reação 1 é fonte de calor para sustentar a reação 2 na proporção molar aproximada de 15 para 1.

(D) À temperatura de 450 K, ambas as reações são espontâneas.

(E) A reação 1 apresenta diminuição de entropia.

RESOLUÇÃO 38ª QUESTÃO:

Pelos dados do enunciado, temos os seguintes valores de variação de entalpia e entropia para cada reação:

1ª reação:

$\Delta H_1 = (0 - 110{,}5) - (-271{,}9 + 0) = +161{,}4$ kJ/mol

$\Delta S_1 = (27{,}3 + 197{,}9) - (60{,}8 + 5{,}7) = +158{,}7$ J/mol.K

2ª reação:

$\Delta H_2 = (0 - 393{,}5) - (-271{,}9 - 110{,}5) = -11{,}1$ kJ/mol

$\Delta S_2 = (27{,}3 + 213{,}7) - (60{,}8 + 197{,}9) = -17{,}7$ J/mol.K

Analisando as alternativas, tem-se que:

(A) Falso. A reação 1 é endotérmica ($\Delta H > 0$) enquanto a 2 é exotérmica ($\Delta H < 0$).

(B) Verdadeiro. Como $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ no equilíbrio temos que $\Delta G = 0 \rightarrow T = \frac{\Delta H}{\Delta S}$.

$T_{equilíbrio} = -\frac{11{,}1 \times 10^3}{-17{,}7} = 627$ K

(C) Falso. A reação 1 é endotérmica, logo não pode ser fonte de calor.

(D) Falso. Realizando os cálculos para a primeira reação:

$$\Delta G = 161{,}4 \times 10^3 - 450 \times 158{,}7 > 0 \therefore não\ é\ espontânea$$

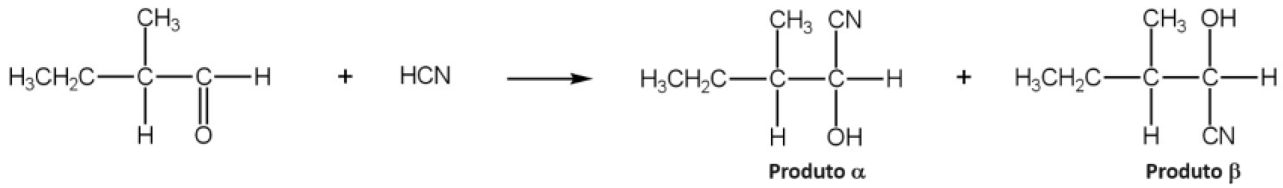
(E) Falso. Como demonstrado acima, a reação 1 possui variação de entropia positiva.

ALTERNATIVA CORRETA: B

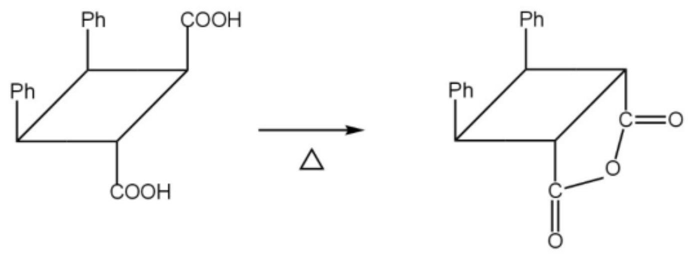
39ª QUESTÃO

Considere as três propostas de reação a seguir.

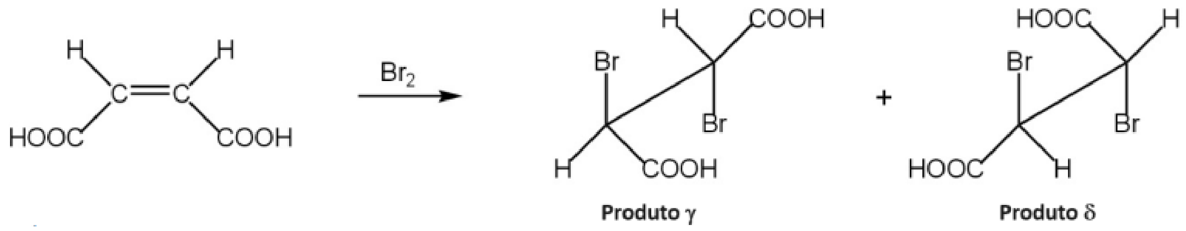
Reação 1:



Reação 2:



Reação 3:



A ÚNICA alternativa correta é:

(A) Na reação 1, a partir de um reagente opticamente ativo, observa-se nos produtos α e β a formação de um novo centro quiral, implicando produtos opticamente inativos por conterem um par quiral dextrogiro, levogiro.

(B) A reação 2 não ocorre.

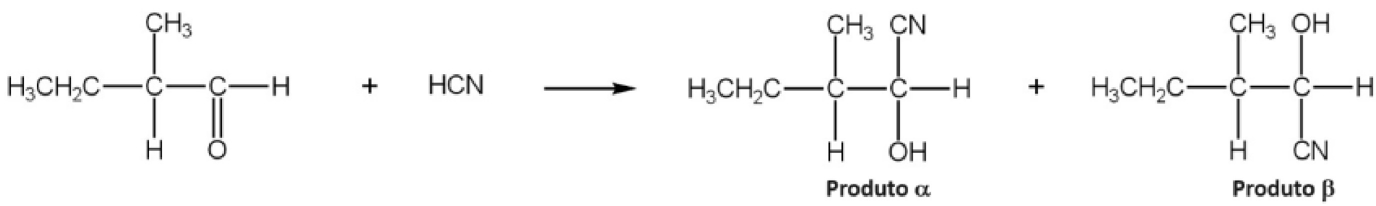
(C) A reação 2 é uma reação de condensação intramolecular que produz anidrido.

(D) Na reação 3, os produtos γ e δ são representações de um mesmo composto.

(E) Na reação 3 o ácido maleico, isômero geométrico do ácido fumárico, reage com bromo produzindo isômeros meso.

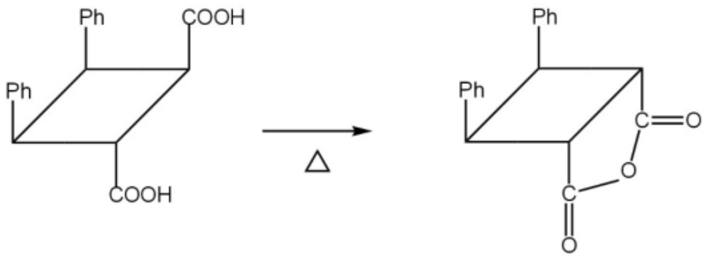
RESOLUÇÃO 39ª QUESTÃO:

Reação 1:



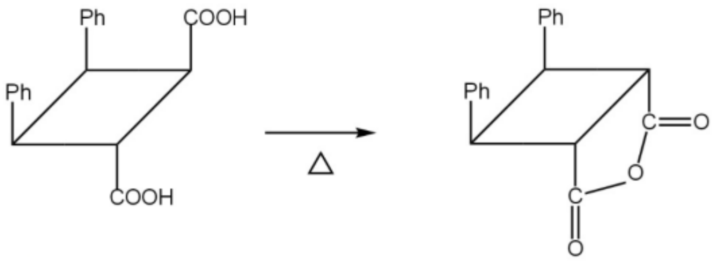
Na reação 1, a partir de um reagente que apresenta atividade óptica, são obtidos dois compostos também opticamente ativos, contendo dois carbonos quirais e que são diastereoisômeros entre si.

Reação 2:



A reação não acontece porque o ácido dicarboxílico trans não possui a geometria adequada para a desidratação intramolecular necessária à formação de um anidrido de ácido com configuração cis.

Reação 2:



A reação de adição de Br2 ao ácido maleico, que é um diastereoisômero do ácido fumárico, resulta na formação de um par de enantiômeros.

Logo, o item B está correto.

ALTERNATIVA CORRETA: B

40ª QUESTÃO

Com relação à série de decaimento radioativo do ${}_{92}U^{238}$ até ${}_{82}Pb^{206}$, a única alternativa INCORRETA é:

(A) Na emissão de uma partícula α, o ${}_{92}U^{238}$ decai para um elemento ${}_{90}X^{234}$.

(B) Por não ser físsil, o ${}_{92}U^{238}$ não é empregado isoladamente para a geração de energia em reatores nucleares.

(C) Uma partícula α é emitida espontaneamente por certos núcleos de elementos radioativos, com número atômico maior que 82, como urânio, tório, polônio e rádio.

(D) Na emissão de uma partícula α e de duas partículas β, o ${}_{92}U^{238}$ decai para o seu isótopo ${}_{92}U^{234}$.

(E) A distribuição eletrônica do ${}_{82}Pb^{206}$ $\left(1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^6\ 5s^2\ 4d^{10}\ 5p^6\ 6s^2\ 4f^{14}\ 5d^{10}\ 6p^2\right)$ garante sua estabilidade nuclear.

RESOLUÇÃO 40ª QUESTÃO:

A série de decaimento radioativo do ${}^{238}_{92}U$ até o ${}^{206}_{82}Pb$ pode ser

A (V)

Pela conservação da carga e do número de massa, temos que a equação nuclear é: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{234}_{90}X$.

B (V)

O isótopo do urânio que é combustível de fissão nuclear é ${}^{235}_{92}U$ e não o ${}^{238}_{92}U$.

C (V)

Muitos radionuclídeos pesados são emissores de partícula α.

D (V)

Mais uma vez, pela conservação da carga e do número de massa, temos que a equação nuclear é:

$^{238}_{92}U \rightarrow ^{4}_{2}\alpha + 2\,^{0}_{-1}\beta + ^{234}_{92}U$

E (F)

Apesar da distribuição do $^{206}_{82}Pb$ estar correta, a estabilidade nuclear não possui relação com a eletrosfera.

ALTERNATIVA CORRETA: E

Professores:

Carlos Lacerda | Felipe Custódio | Pedro Madeira

Romário Freire | Ubiratan Cunha | Victor Wanderley