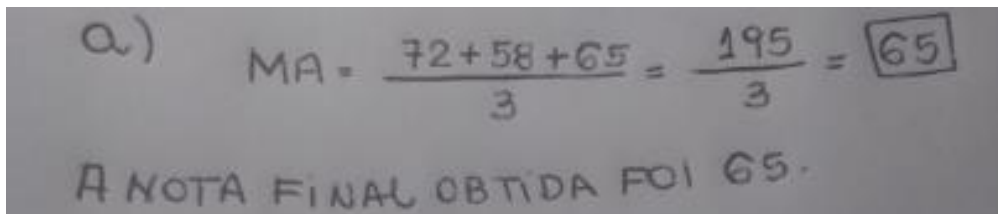


RESOLUÇÃO de MATEMÁTICA 2º FASE UFPR – 2024
Professores ADEMIR, LAWRENCE E PROENÇA.

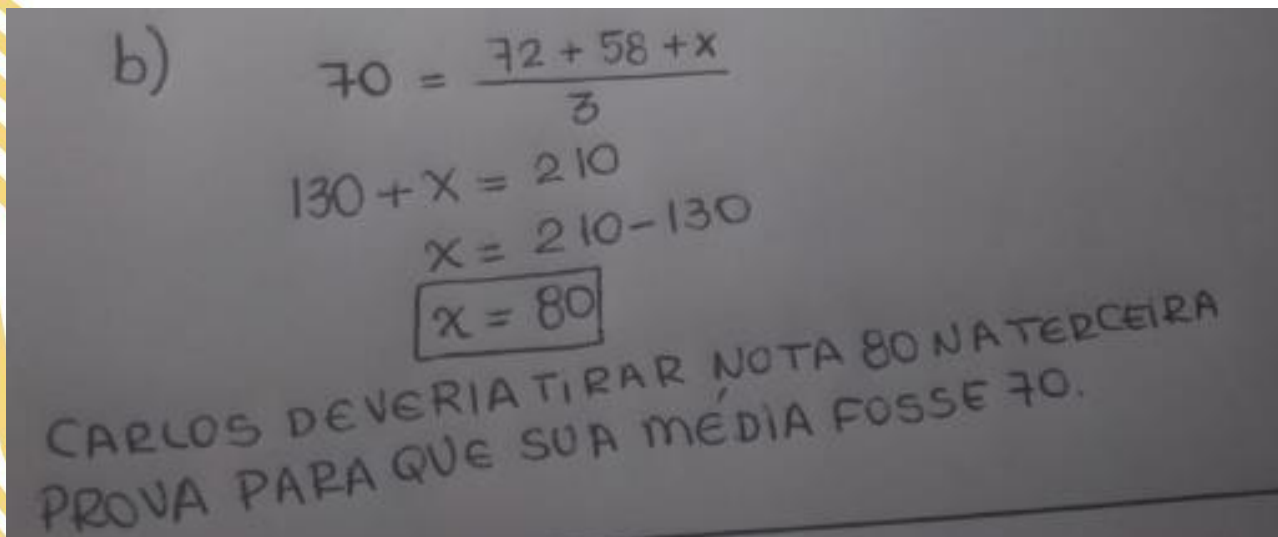
01 - **Valor: 4 pontos** A nota final de uma disciplina é calculada pela média aritmética das notas de três provas, realizadas durante o período letivo. Carlos obteve notas 72 e 58 nas duas primeiras provas.

a) Sabendo que a nota de Carlos da terceira prova foi 65, qual foi a nota final obtida? Justifique sua resposta.



a) $MA = \frac{72 + 58 + 65}{3} = \frac{195}{3} = 65$
A NOTA FINAL OBTIDA FOI 65.

b) Que nota Carlos deveria ter obtido na terceira prova para que sua média fosse 70? Justifique sua resposta.

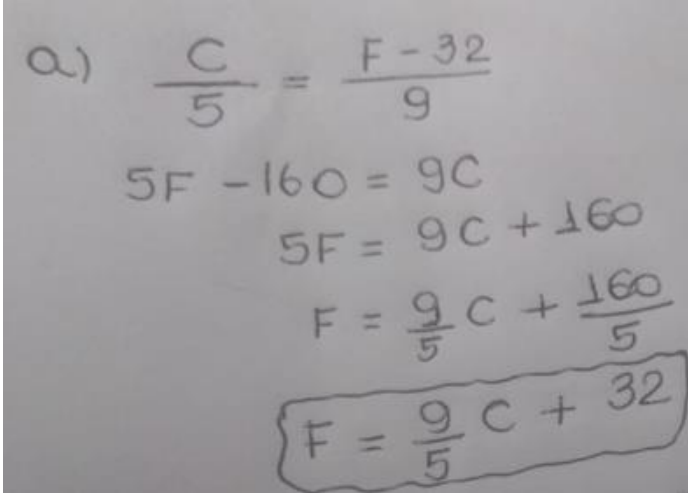


b) $70 = \frac{72 + 58 + x}{3}$
 $130 + x = 210$
 $x = 210 - 130$
 $x = 80$
CARLOS DEVERIA TIRAR NOTA 80 NA TERCEIRA PROVA PARA QUE SUA MÉDIA FOSSE 70.

- 02 - Valor: 6 pontos A relação entre a temperatura medida em graus Fahrenheit (F) e a temperatura medida em graus Celsius (C) é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

- a) A partir dessa expressão, pode-se obter F em função de C. Nesse caso, F será uma função afim, ou seja, uma função de 1º grau. Qual é o coeficiente angular da função F? Justifique sua resposta.



a)
$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

$$5F - 160 = 9C$$

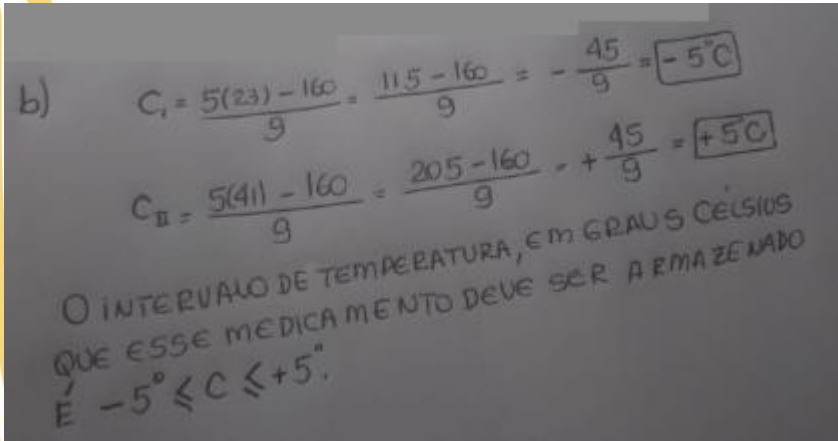
$$5F = 9C + 160$$

$$F = \frac{9}{5}C + \frac{160}{5}$$

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Logo o coeficiente angular é $\frac{9}{5}$

- b) Um medicamento deve ser armazenado numa temperatura, em Fahrenheit (F), no intervalo $23 \leq F \leq 41$. Qual é o intervalo de temperatura, em Celsius (C), em que esse medicamento deve ser armazenado? Justifique sua resposta.

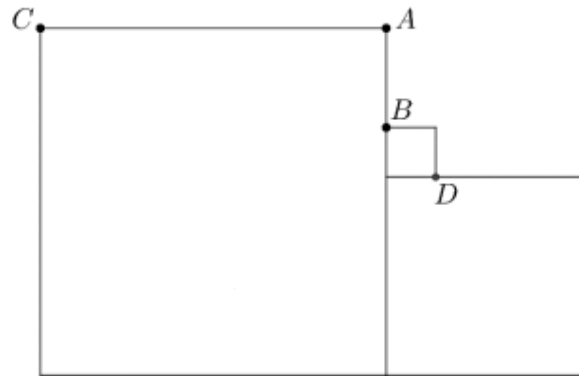


b)
$$C_I = \frac{5(23) - 160}{9} = \frac{115 - 160}{9} = -\frac{45}{9} = -5^\circ\text{C}$$

$$C_{II} = \frac{5(41) - 160}{9} = \frac{205 - 160}{9} = +\frac{45}{9} = +5^\circ\text{C}$$

O INTERVALO DE TEMPERATURA, EM GRAUS CELSIUS QUE ESSE MEDICAMENTO DEVE SER ARMAZENADO É $-5^\circ \leq C \leq +5^\circ$.

- 03 - Valor: 6 pontos Considere os três quadrados e os pontos A , B , C e D , representados na figura ao lado. Os comprimentos dos lados desses quadrados formam uma progressão aritmética de razão 6 cm, e o comprimento do lado do quadrado menor mede 2 cm.



- a) Qual é a distância, em centímetros, do ponto A ao ponto B ? Justifique sua resposta.

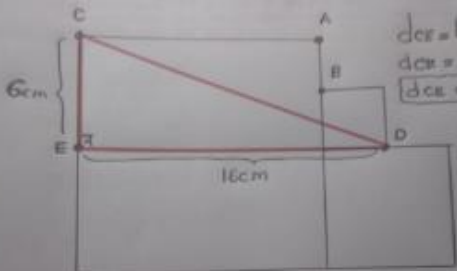
3) P.A. $L_{10} = 2 \text{ cm}$
 RAZÃO = 6 cm $L_{20} = 8 \text{ cm}$
 $L_{30} = 14 \text{ cm}$

a) $d_{AB} = L_{30} - (L_{10} + L_{20})$
 $d_{AB} = 14 - (2 + 8)$
 $d_{AB} = 14 - 10$
 $d_{AB} = 4 \text{ cm}$

A DISTÂNCIA, EM CENTÍMETROS, DO PONTO A AO PONTO B É 4 cm

- b) Qual é a distância, em centímetros, do ponto C ao ponto D ? Justifique sua resposta.

b)



$d_{CE} = L_{30} - L_{10}$
 $d_{CE} = 14 - 8$
 $d_{CE} = 6 \text{ cm}$

$d_{DE} = L_{30} + L_{10}$
 $d_{DE} = 14 + 2$
 $d_{DE} = 16 \text{ cm}$

APLICANDO PITÁGORAS
 $CD^2 = CE^2 + DE^2$
 $CD = \sqrt{6^2 + 16^2}$
 $CD = \sqrt{36 + 256}$
 $CD = \sqrt{292}$
 $CD = \sqrt{2^2 \cdot 73}$
 $CD = 2\sqrt{73} \text{ cm}$

A DISTÂNCIA, EM CENTÍMETROS, DO PONTO C AO PONTO D É $2\sqrt{73}$ cm.

04 - Valor: 6 pontos Considere o polinômio $p(x) = 2x^2 + nx + n$, sendo n um número inteiro positivo.

a) Encontre a(s) raiz(es) de $p(x)$ no caso em que $n = 8$. Justifique sua resposta.

4) * n É UM NÚMERO INTEIRO POSITIVO *

a) $P(x) = 2x^2 + 8x + 8$
 $2x^2 + 8x + 8 = 0$
 $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{-8 \pm 0}{4}$
 $\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{-8+0}{4} = -2 \\ x'' = \frac{-8-0}{4} = -2 \end{array} \right.$

O POLINÔMIO $P(x)$ POSSUI RAÍZ DUPLA $x' = x'' = -2$.

b) Determine todos os valores possíveis de n , de forma que $p(x)$ não possua raízes reais. Justifique sua resposta.

b) PARA QUE O POLINÔMIO $P(x)$ NÃO POSSUA RAÍZES REAIS O DISCRIMINANTE (Δ) DEVE SER $\Delta < 0$.

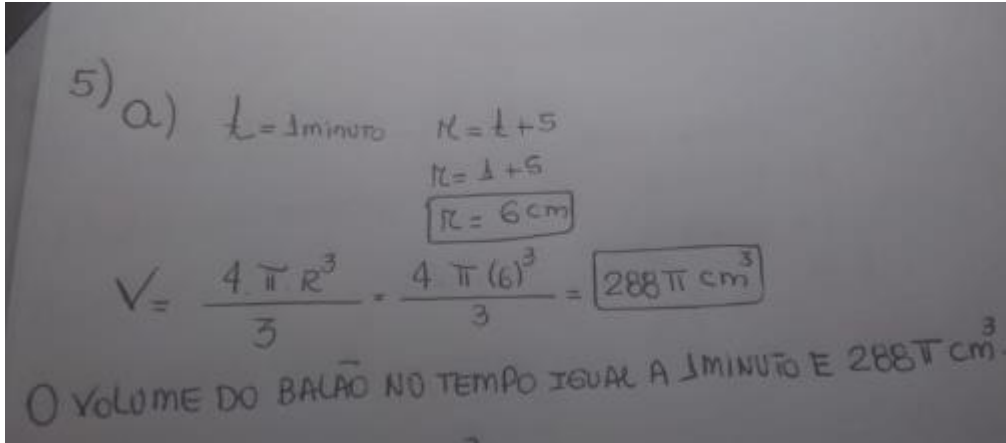
$P(x) = 2x^2 + nx + n$
 $\Delta = b^2 - 4ac$
 $b^2 - 4ac < 0$
 $n^2 - 4(2)(n) < 0$
 $n^2 - 8n < 0$
 $n(n-8) = 0$
 \downarrow \downarrow
 $n=0$ $n=8$

FAZENDO O ESTUDO DO SINAL

PARA QUE O POLINÔMIO $P(x)$ NÃO POSSUA RAÍZES REAIS, TODOS OS SEUS VALORES SÃO $n \in \mathbb{Z} / 0 < n < 8$.

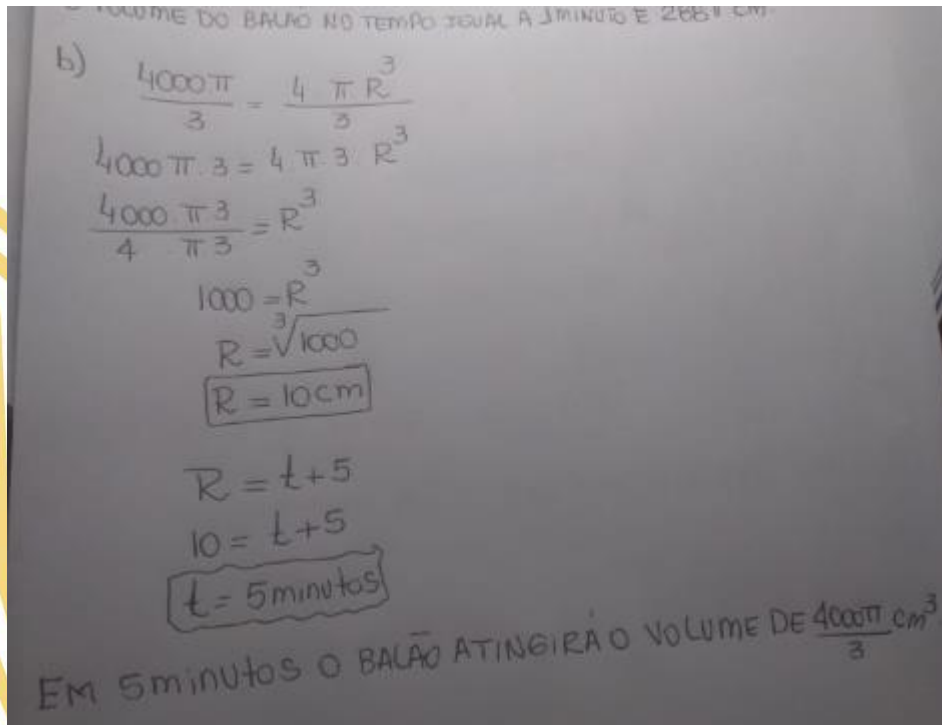
05 - Valor: 6 pontos Um balão esférico está sendo preenchido com gás. O raio r desse balão, medido em centímetros, aumenta com o tempo t , medido em minutos, de acordo com a expressão $r = t + 5$.

a) Determine o volume do balão no tempo igual a 1 minuto. Justifique sua resposta.



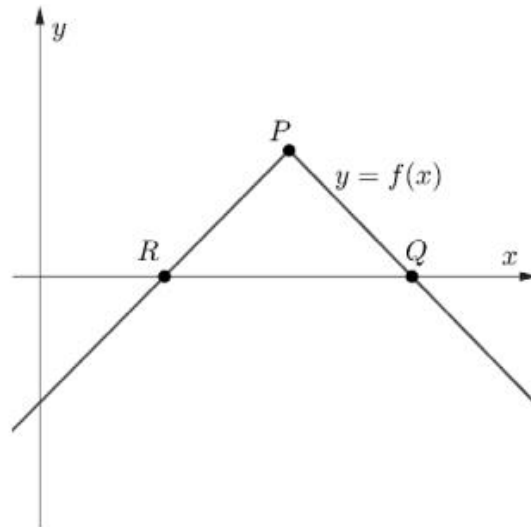
5) a) $t = 1 \text{ minuto}$ $R = t + 5$
 $R = 1 + 5$
 $R = 6 \text{ cm}$
 $V = \frac{4 \pi R^3}{3} = \frac{4 \pi (6)^3}{3} = 288 \pi \text{ cm}^3$
 O VOLUME DO BALÃO NO TEMPO IGUAL A 1 MINUTO É $288 \pi \text{ cm}^3$.

b) Em quantos minutos o balão atingirá o volume $\frac{4000 \pi}{3} \text{ cm}^3$? Justifique sua resposta.



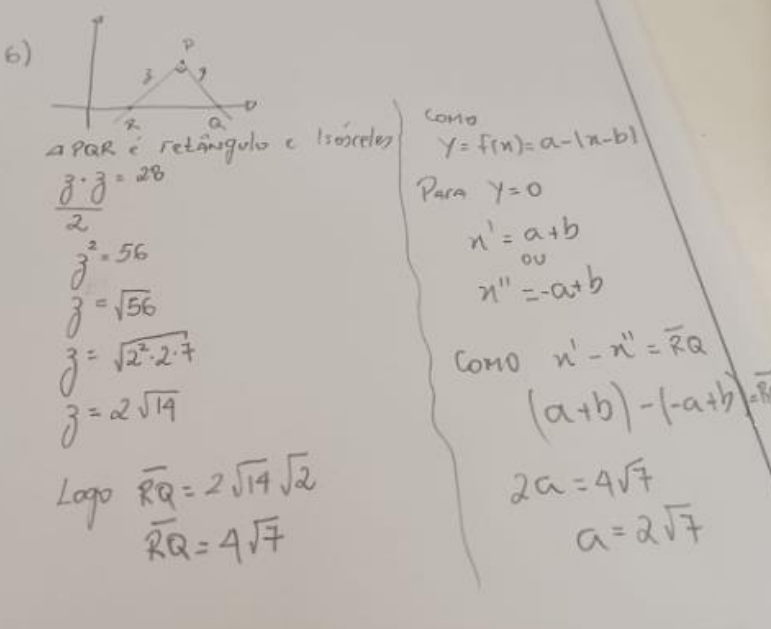
b) $\frac{4000 \pi}{3} = \frac{4 \pi R^3}{3}$
 $4000 \pi \cdot 3 = 4 \pi \cdot 3 \cdot R^3$
 $\frac{4000 \pi \cdot 3}{4 \pi \cdot 3} = R^3$
 $1000 = R^3$
 $R = \sqrt[3]{1000}$
 $R = 10 \text{ cm}$
 $R = t + 5$
 $10 = t + 5$
 $t = 5 \text{ minutos}$
 EM 5 MINUTOS O BALÃO ATINGIRÁ O VOLUME DE $\frac{4000 \pi}{3} \text{ cm}^3$.

- 06 - Valor: 6 pontos Na figura abaixo, estão representados os pontos P, Q, R sobre o gráfico da função $y = f(x) = a - |x - b|$, com a, b números reais positivos. O triângulo formado por esses três pontos possui área com valor numérico igual a 28.



- a) Qual é o valor numérico de a ? Justifique sua resposta.

6)



$\triangle PQR$ é retângulo e isósceles

$$\frac{j \cdot j}{2} = 28$$

$$j^2 = 56$$

$$j = \sqrt{56}$$

$$j = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 7}$$

$$j = 2\sqrt{14}$$

Logo $\overline{RQ} = 2\sqrt{14} \sqrt{2}$
 $\overline{RQ} = 4\sqrt{7}$

Como $y = f(x) = a - |x - b|$
Para $y = 0$
 $x' = a + b$
ou
 $x'' = -a + b$

Como $x' - x'' = \overline{RQ}$
 $(a + b) - (-a + b) = 4\sqrt{7}$
 $2a = 4\sqrt{7}$
 $a = 2\sqrt{7}$

- b) Sabendo que a distância do ponto Q ao eixo y tem valor numérico igual a $3\sqrt{7}$, qual é o valor numérico de b ? Justifique sua resposta.

b) Como a distância do ponto Q ao eixo y é $3\sqrt{7}$, TEMOS:

$$(a + b) = 3\sqrt{7}$$

$$2\sqrt{7} + b = 3\sqrt{7}$$

$$\boxed{b = \sqrt{7}}$$

07 - Valor: 6 pontos Seja X o conjunto das matrizes M da forma

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix},$$

com $a, b, c, d, e \in \{-1, 0, 1\}$.

a) Quantas matrizes de X são simétricas, isto é, satisfazem $M = M^T$, sendo M^T a matriz transposta de M? Justifique sua resposta.

7)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & e \end{pmatrix}$$

a)

$$M = M^T \Rightarrow \text{DEMOSTRAR} \begin{cases} a = a \\ b = d \\ c = c \\ d = b \\ e = e \end{cases}$$

Como $a, b, c, d, e \in \{-1, 0, 1\}$

TEMOS AS SOLUÇÕES $\frac{(3)}{a} \cdot \frac{(3)}{b} \cdot \frac{(3)}{c} \cdot \frac{(1)}{d} \cdot \frac{(3)}{e} = \boxed{81 \text{ MATRIZES}}$

SESO IGUAIS,
LUGO $b = d$

b) Quantas matrizes M, do conjunto X, satisfazem $M \cdot M^T = I$, sendo M^T a matriz transposta de M, e I a matriz identidade? Justifique sua resposta.

b)

$$\det(M \cdot M^T) = \det I$$

$$\det M \cdot \det M^T = 1$$

$$(ace - bcd)^2 = 1$$

$$a^2 c^2 e^2 - 2abde + b^2 d^2 = 1$$

$$c^2 (a^2 e^2 - 2abde + b^2 d^2) = 1$$

$$c^2 (ae - bd)^2 = 1$$

$$c^2 = 1$$

$$c = \pm 1$$

$$ae - bd = +1$$

$$\begin{pmatrix} (1) & (0) \\ (0) & (-1) \end{pmatrix}$$

$$ae - bd = -1$$

$$\begin{pmatrix} (0) & (1) \\ (-1) & (0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{a} \cdot \frac{3}{b} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{e} = 16$$

$$= 18 - (2) = 16$$

$$\begin{cases} a = e = 0 \\ b = d = 0 \end{cases}$$